Méthodes d'analyse asymptotique et d'approximation numérique

Problèmes d'évolution multi-échelles de type oscillatoire ou dissipatif

Léopold Trémant

sous la direction de Philippe Chartier et Mohammed Lemou

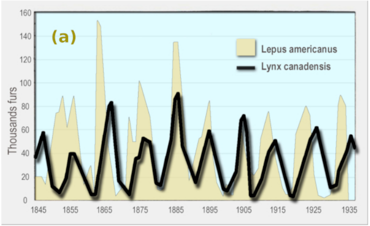
Soutenance de thèse

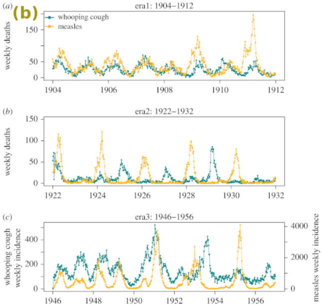
IRMAR, 8 décembre 2021

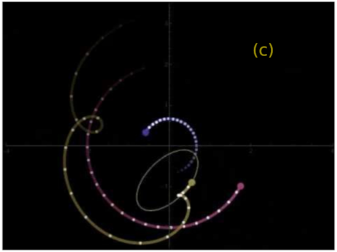
Sommaire

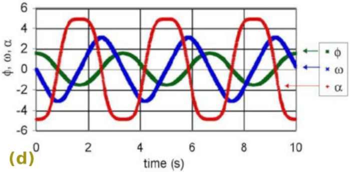
Sommaire

Quelques systèmes d'évolution









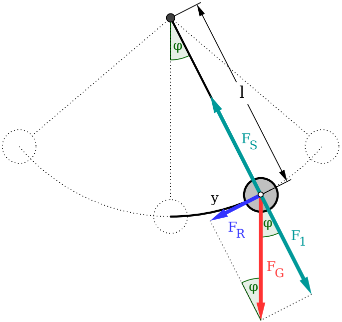
(a) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Milliers_fourrures_vendues_en_environ_90_ans_odum_1953_en.jpg
(b) https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rstb.2018.0270
(c) https://www.youtube.com/watch?v=qIVe_xEv6zQ
(d) https://www.researchgate.net/figure/Angle-velocity-and-acceleration-versus-time-for-undamped-pendulum-al-large-amplitude_fig2_26628774

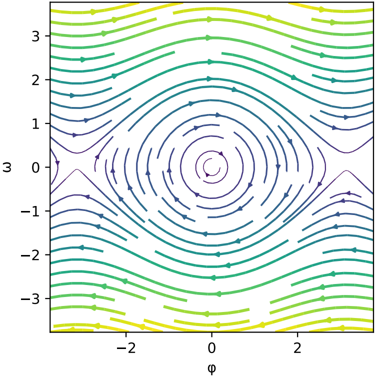
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f\big(u\big), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



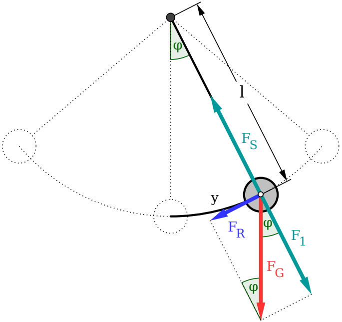


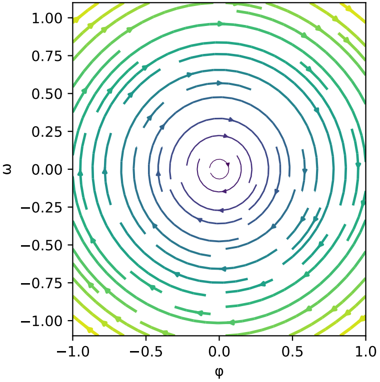
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



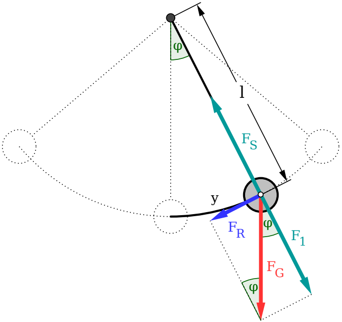


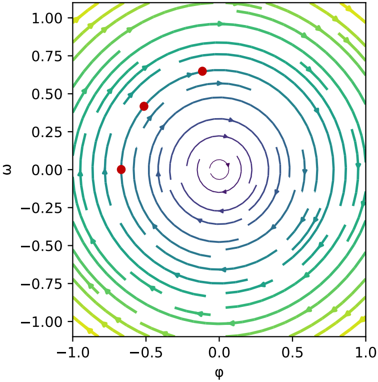
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



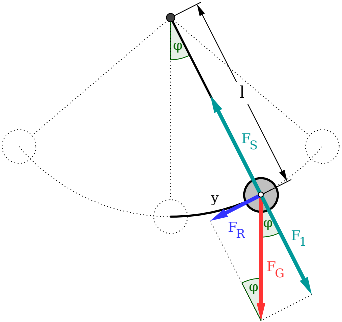


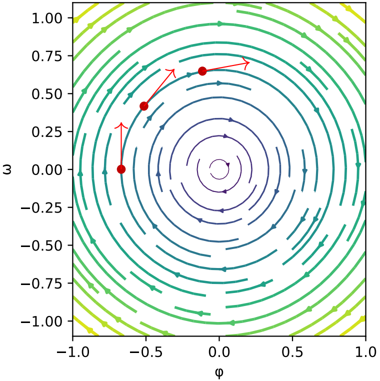
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



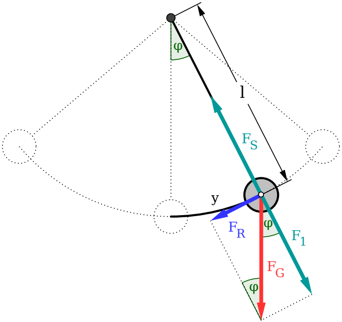


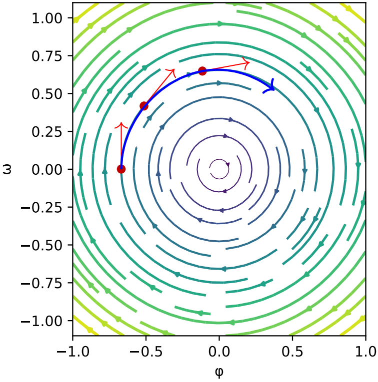
L’équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l’équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



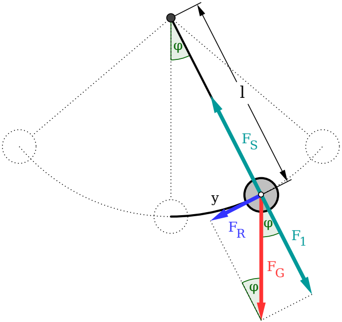


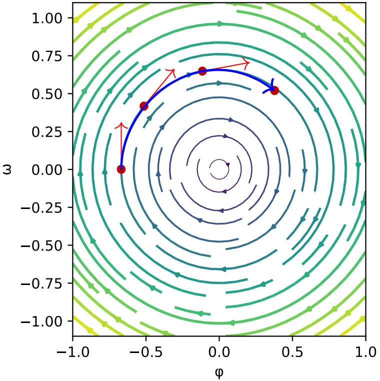
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



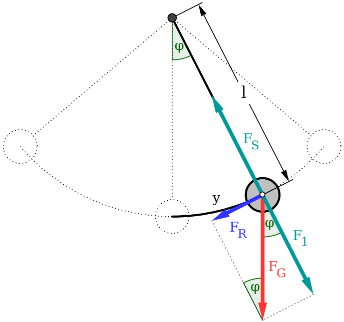


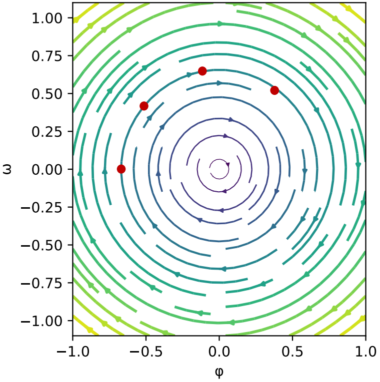
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



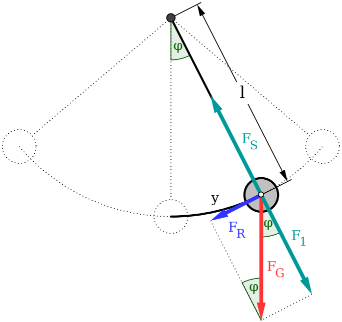


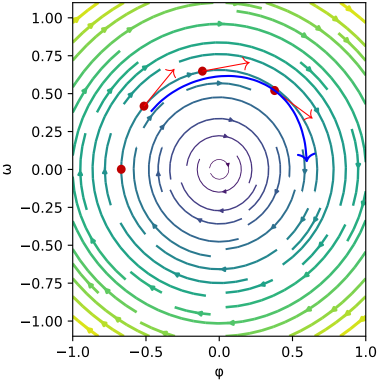
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



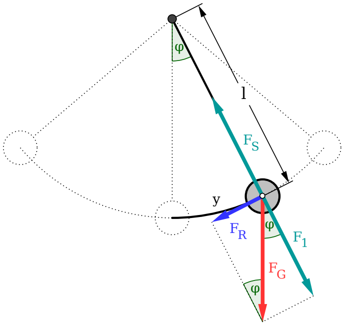


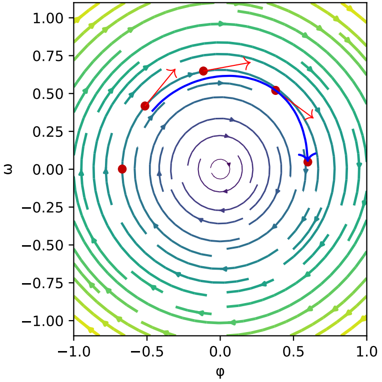
L’équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l’équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



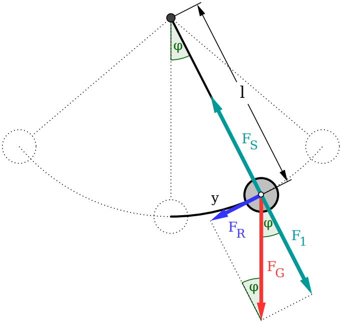


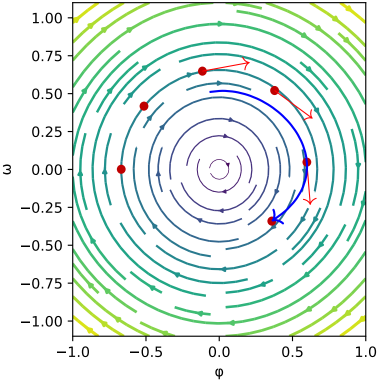
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



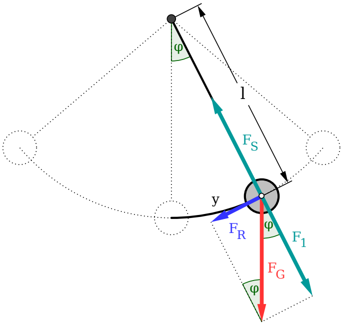


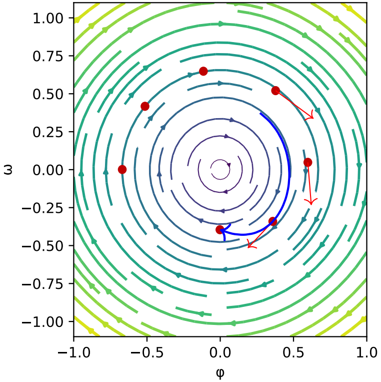
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



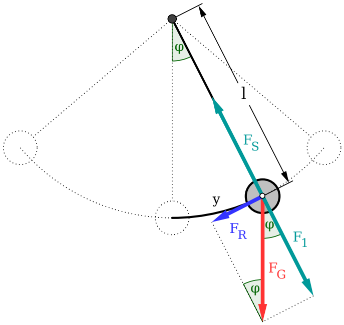


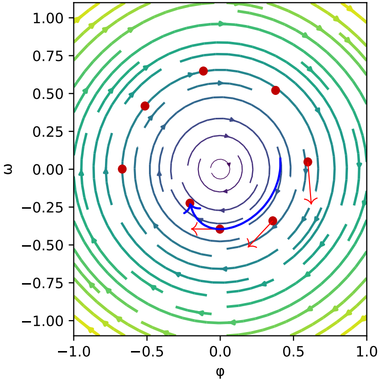
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



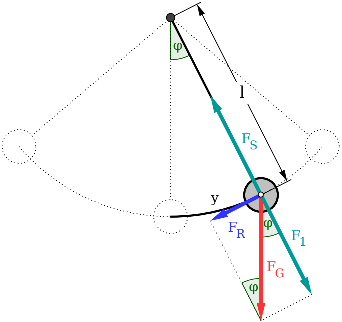


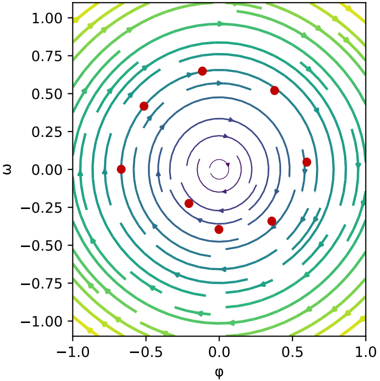
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$



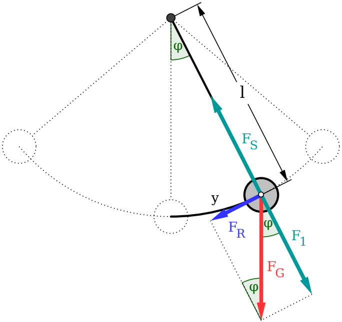


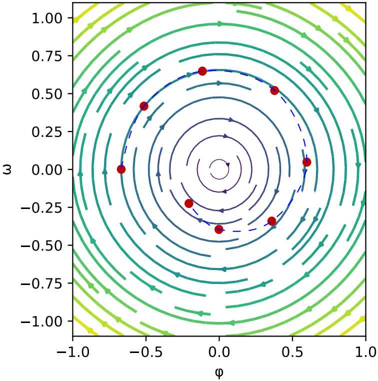
L'équation différentielle

$$\boxed{\partial_t u = f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

Par exemple un pendule est régi par l'équation,

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$





Méthode numérique et erreur

On discrétise l'intervalle temporel $[0, 1]$ avec $N + 1$ points, i.e. avec un pas de temps $\Delta t := 1/N$, et on approche la solution

$$t_n = n\Delta t \qquad \text{et} \qquad u_n = u(t_n).$$

Pour déterminer (u_n), on considère une approximation de l'équation différentielle,

$$\partial_t u = f(u) \qquad \text{devient} \qquad \frac{1}{\Delta t}\left(u_{n+1} + \sum_{i=0}^{s} \alpha_i u_{n-i}\right) = \sum_{i=0}^{s} \beta_i f_{n-i}.$$

Méthode numérique et erreur

On discrétise l'intervalle temporel $[0, 1]$ avec $N + 1$ points, i.e. avec un pas de temps $\Delta t := 1/N$, et on approche la solution

$$t_n = n\Delta t \qquad \text{et} \qquad u_n = u(t_n).$$

Pour déterminer (u_n), on considère une approximation de l'équation différentielle,

$$\partial_t u = f(u) \qquad \text{devient} \qquad \frac{1}{\Delta t}\left(u_{n+1} + \sum_{i=0}^{s} \alpha_i u_{n-i}\right) = \sum_{i=0}^{s} \beta_i f_{n-i}.$$

Résultat de convergence

Si le champ de vecteurs $u \mapsto f(u)$ est $(q + 1)$-fois dérivable, alors l'erreur de ce schéma vérifie

$$\max_{0 \le n \le N} |u(t_n) - u_n| \le C\Delta t^q \int_0^1 \left| u^{(q+1)}(t) \right| \mathrm{d}t$$

pour une certaine constante $C > 0$ et avec q *l'ordre du schéma*.

Méthode numérique et erreur

On discrétise l'intervalle temporel $[0, 1]$ avec $N + 1$ points, i.e. avec un pas de temps $\Delta t := 1/N$, et on approche la solution

$$t_n = n\Delta t \qquad \text{et} \qquad u_n = u(t_n).$$

Pour déterminer (u_n), on considère une approximation de l'équation différentielle,

$$\partial_t u = f(u) \qquad \text{devient} \qquad \frac{1}{\Delta t}\left(u_{n+1} + \sum_{i=0}^{s} \alpha_i u_{n-i}\right) = \sum_{i=0}^{s} \beta_i f_{n-i}.$$

Résultat de convergence

Si le champ de vecteurs $u \mapsto f(u)$ est $(q + 1)$-fois dérivable, alors l'erreur de ce schéma vérifie

$$\max_{0 \leq n \leq N} |u(t_n) - u_n| \leq C\Delta t^q \int_0^1 \left|u^{(q+1)}(t)\right| \mathrm{d}t$$

pour une certaine constante $C > 0$ et avec *q l'ordre du schéma*.

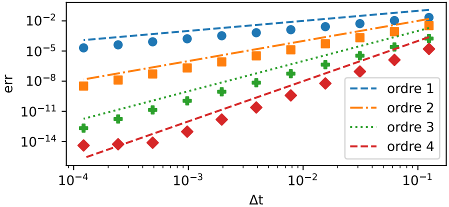


Figure: Erreur numérique sur le problème du pendule pour des schémas d'Adams-Bashforth et comparaison avec la convergence théorique.

Sommaire

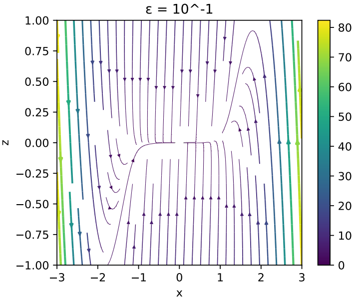
Un problème à relaxation rapide

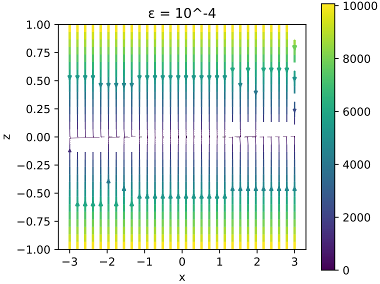
$$\boxed{\partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon} A u + f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

À partir d'un problème de la forme

$$\begin{cases} \partial_t v = \tilde{v}, \\ \partial_t \tilde{v} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(g(v) - \tilde{v}\right), \end{cases} \qquad \text{on trouve} \qquad \begin{cases} \partial_t x = g(x) - z, \\ \partial_t z = -\dfrac{1}{\varepsilon} z + g'(x)\left(g(x) - z\right). \end{cases}$$

Le portrait de phase fait clairement apparaître une raideur quand ε diminue...





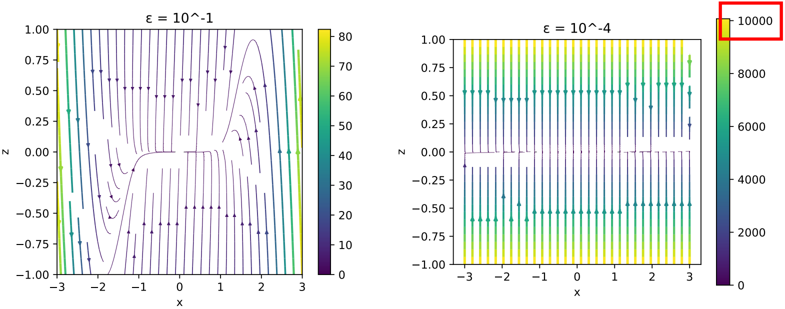
Un problème à relaxation rapide

$$\boxed{\partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon} A u + f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

À partir d'un problème de la forme

$$\begin{cases} \partial_t v = \tilde{v}, \\ \partial_t \tilde{v} = \frac{1}{\varepsilon}(g(v) - \tilde{v}), \end{cases} \quad \text{on trouve} \quad \begin{cases} \partial_t x = g(x) - z, \\ \partial_t z = -\frac{1}{\varepsilon} z + g'(x)\big(g(x) - z\big). \end{cases}$$

Le portrait de phase fait clairement apparaître une raideur quand ε diminue...



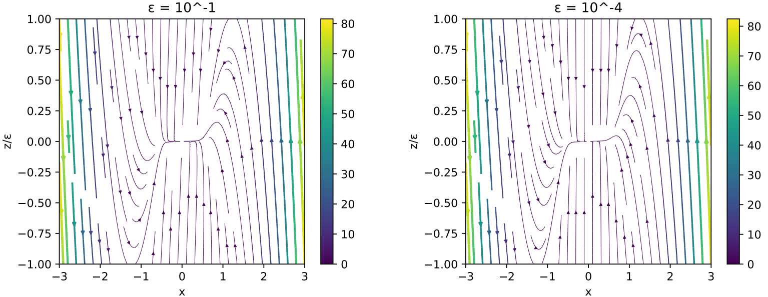
Un problème à relaxation rapide

$$\boxed{\partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon} A u + f(u), \qquad u(0) = u_0.}$$

À partir d'un problème de la forme

$$\begin{cases} \partial_t v = \tilde{v}, \\ \partial_t \tilde{v} = \frac{1}{\varepsilon}(g(v) - \tilde{v}), \end{cases} \qquad \text{on trouve} \qquad \begin{cases} \partial_t x = g(x) - z, \\ \partial_t z = -\frac{1}{\varepsilon} z + g'(x)(g(x) - z). \end{cases}$$

Le portrait de phase fait clairement apparaître une raideur quand ε diminue... Mais pas dans le domaine $|z| \leq \varepsilon$! Le problème est multi-échelles.



L'écroulement de l'erreur numérique

En utilisant un schéma de type exponentiel Runge-Kutta, i.e. du type

$$u_{n+1} = e^{-\Delta t A/\varepsilon} u_n + \left(\int_0^{\Delta t} e^{(\sigma - \Delta t)A/\varepsilon} \mathrm{d}\sigma \right) f(u_n),$$

mais d'ordre 2, on observe une convergence dégradée pour $\Delta t \sim \varepsilon$.

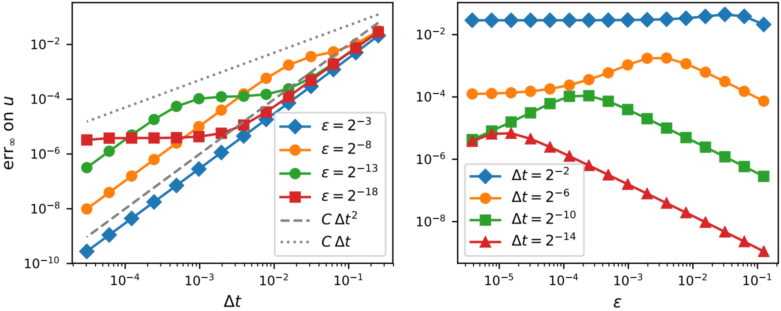


Figure: Erreur sur $u = (x, z)$ en fonction de Δt (gauche) et en fonction de ε (droite).

On s'intéresse alors à l'erreur *uniforme*, i.e.
l'erreur maximale par rapport à ε.

Principe de convergence uniforme

$$\begin{tikzcd}
u^{\varepsilon_0}(t) \arrow[r, "\mathcal{O}(\Delta t^q)"] \arrow[dd, "\varepsilon \to 0"'] & (u_n^{\varepsilon_0}) \arrow[dd] \\
{} \arrow[r, dashed, "\mathcal{O}(\Delta t^s)"] & {} \\
u^0(t) \arrow[r, "\mathcal{O}(\Delta t^q)"'] & (u_n^0)
\end{tikzcd}$$

Précision uniforme

On dit qu'une méthode est *uniformément précise* si son ordre de convergence uniforme est égal à l'ordre de la méthode, i.e. si

$$\sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \max_{0\leq n\leq N} |u(t_i) - u_i| = \mathcal{O}(\Delta t^q)$$

pour u_0 *quelconque*.

Sur le schéma, cela se traduit par $s = q$.

Principe de convergence uniforme

$$\begin{tikzcd}
u^{\varepsilon_0}(t) \arrow[r, "\mathcal{O}(\Delta t^q)"] \arrow[dd, "\varepsilon \to 0"'] & (u_n^{\varepsilon_0}) \arrow[dd] \\
{} \arrow[r, dashed, "\mathcal{O}(\Delta t^s)"] & {} \\
u^0(t) \arrow[r, "\mathcal{O}(\Delta t^q)"'] & (u_n^0)
\end{tikzcd}$$

Précision uniforme

On dit qu'une méthode est *uniformément précise* si son ordre de convergence uniforme est égal à l'ordre de la méthode, i.e. si

$$\sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \max_{0\leq n\leq N} |u(t_i) - u_i| = \mathcal{O}(\Delta t^q)$$

pour u_0 *quelconque*.

Sur le schéma, cela se traduit par $s = q$.

	ordre usuel	ordre uniforme	objectif
schéma explicite	q	N/A	N/A
Strang	2	1	2
IMEX-BDF	q	$1x$ / $0z$	q
RK exponentiel	q	1	q
Radau IIA	2q-1	q+1	2q-1

Plan de la présentation

Problèmes hautement oscillant

- Introduction aux développements asymptotiques
- Exposition de propriétés géométriques

Plan de la présentation

Problèmes hautement oscillant

- Introduction aux développements asymptotiques
- Exposition de propriétés géométriques

Problèmes à relaxation rapide

- Construction d'une décomposition micro-macro,

$$u(t) = \Omega_{t/\varepsilon}^{[n]}\big(v(t)\big) + w(t)$$

avec $\Omega_\tau^{[n]}(u) = e^{-\tau A}u + \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\dot{v} = F^{[n]}(v)$ non-raide, et $w = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$.

Plan de la présentation

Problèmes hautement oscillant

- Introduction aux développements asymptotiques
- Exposition de propriétés géométriques

Problèmes à relaxation rapide

- Construction d'une décomposition micro-macro,

$$u(t) = \Omega_{t/\varepsilon}^{[n]}(v(t)) + w(t)$$

avec $\Omega_\tau^{[n]}(u) = e^{-\tau A}u + \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\dot{v} = F^{[n]}(v)$ non-raide, et $w = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$.

- Résolution avec précision uniforme d'ordre $n+1$, i.e.

$$\left|u(t_i) - u_i\right|_\varepsilon = \left|\left(\mathrm{id} + \frac{1}{\varepsilon}A\right)(u(t_i) - u_i)\right| \leq C\Delta t^{n+1}$$

avec C indépendant de ε et $u_i = \Omega_{t_i/\varepsilon}^{[n]}(v_i) + w_i$.

Plan de la présentation

Problèmes hautement oscillant

- Introduction aux développements asymptotiques
- Exposition de propriétés géométriques

Problèmes à relaxation rapide

- Construction d'une décomposition micro-macro,

$$u(t) = \Omega^{[n]}_{t/\varepsilon}\big(v(t)\big) + w(t)$$

  avec $\Omega^{[n]}_{\tau}(u) = e^{-\tau A}u + \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\dot{v} = F^{[n]}(v)$ non-raide, et $w = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$.

- Résolution avec précision uniforme d'ordre $n+1$, i.e.

$$\left|u(t_i) - u_i\right|_\varepsilon = \left|\left(\mathrm{id} + \frac{1}{\varepsilon}A\right)\left(u(t_i) - u_i\right)\right| \leq C\Delta t^{n+1}$$

  avec C indépendant de ε et $u_i = \Omega^{[n]}_{t_i/\varepsilon}(v_i) + w_i$.

- Application directe à une EDO
- Extension partielle à une EDP avec ajustements ad-hoc.

Sommaire

Contexte

On considère des problèmes *à oscillations rapides forcées*, qui s'écrivent

$$\partial_t u^\varepsilon(t) = g_{t/\varepsilon}\big(u^\varepsilon(t)\big), \qquad u^\varepsilon(0) = u_0 \in \mathcal{U}_0 \subset X.$$

Hypothèses

- L'espace $(X, |\cdot|)$ est un Banach.
- Le champ $(\theta, u) \mapsto g_\theta(u)$ est 1-périodique et continu par rapport à θ.
- $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, le problème est bien posé pour $t \in [0, 1]$
- La solution reste dans un ensemble $\mathcal{K} \subset X$ pour tout t et ε.

Contexte

On considère des problèmes *à oscillations rapides forcées*, qui s'écrivent

$$\partial_t u^\varepsilon(t) = g_{t/\varepsilon}\big(u^\varepsilon(t)\big), \qquad u^\varepsilon(0) = u_0 \in \mathcal{U}_0 \subset X.$$

Hypothèses

- L'espace $(X, |\cdot|)$ est un Banach.
- Le champ $(\theta, u) \mapsto g_\theta(u)$ est 1-périodique et continu par rapport à θ.
- $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, le problème est bien posé pour $t \in [0, 1]$
- La solution reste dans un ensemble $\mathcal{K} \subset X$ pour tout t et ε.

Quelques exemples :

- Schrödinger non-linéaire, $X = H^s(\mathbb{T})$;
- Klein-Gordon relativiste, $X = H^s(\mathbb{T})$;
- Hénon-Heiles peu chaotique, $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Comportement de la solution

$$\partial_t u^\varepsilon(t) = -\left(1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{\varepsilon}\right)\right) u^\varepsilon(t), \qquad u^\varepsilon(0) = 1.$$

$$\text{i.e.} \quad u^\varepsilon(t) = \exp\left(-t + \frac{\varepsilon}{2\pi}\sin\left(2\pi\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)$$

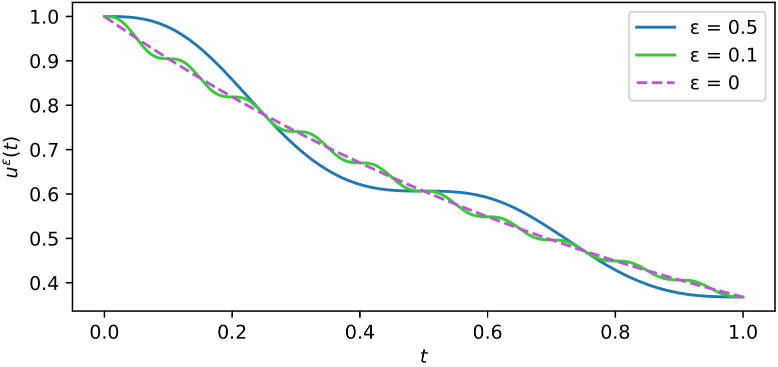


Figure: Solution du problème jouet sur [0, 1] pour différentes valeurs de ε.

La moyennisation comme décomposition

On cherche à écrire la solution sous la forme

$$u^\varepsilon(t) = \Phi^\varepsilon_{t/\varepsilon} \circ \Psi^\varepsilon_t \circ \left(\Phi^\varepsilon_0\right)^{-1}(u_0)$$

avec $(\theta, u) \mapsto \Phi^\varepsilon_\theta(u)$ un changement de variable 1-périodique et $(t, u) \mapsto \Psi^\varepsilon_t(u)$ le flot d'une équation autonome.

$$\Phi^\varepsilon_\theta(u) = u + \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi^\varepsilon_t(u) = G^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon_t(u).$$

Dans l'exemple jouet, on peut définir par exemple :

$$\Phi^\varepsilon_\theta = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\sin\left(2\pi\theta\right)\right) \qquad \text{et} \qquad G^\varepsilon = -1.$$

La moyennisation comme décomposition

On cherche à écrire la solution sous la forme

$$u^\varepsilon(t) = \Phi^\varepsilon_{t/\varepsilon} \circ \Psi^\varepsilon_t \circ \left(\Phi^\varepsilon_0\right)^{-1}(u_0)$$

avec $(\theta, u) \mapsto \Phi^\varepsilon_\theta(u)$ un changement de variable 1-périodique et $(t, u) \mapsto \Psi^\varepsilon_t(u)$ le flot d'une équation autonome.

$$\Phi^\varepsilon_\theta(u) = u + \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi^\varepsilon_t(u) = G^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon_t(u).$$

Dans l'exemple jouet, on peut définir par exemple :

$$\Phi^\varepsilon_\theta = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi\theta)\right) \qquad \text{et} \qquad G^\varepsilon = -1.$$

En général, Φ^ε et G^ε n'existent que sous la forme de séries formelles *divergentes* !

La moyennisation comme décomposition

On cherche à écrire la solution sous la forme

$$u^\varepsilon(t) = \Phi^\varepsilon_{t/\varepsilon} \circ \Psi^\varepsilon_t \circ \left(\Phi^\varepsilon_0\right)^{-1}(u_0)$$

avec $(\theta, u) \mapsto \Phi^\varepsilon_\theta(u)$ un changement de variable 1-périodique et $(t, u) \mapsto \Psi^\varepsilon_t(u)$ le flot d'une équation autonome.

$$\Phi^\varepsilon_\theta(u) = u + \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi^\varepsilon_t(u) = G^\varepsilon \circ \Psi^\varepsilon_t(u).$$

Dans l'exemple jouet, on peut définir par exemple :

$$\Phi^\varepsilon_\theta = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi\theta)\right) \qquad \text{et} \qquad G^\varepsilon = -1.$$

En général, Φ^ε et G^ε n'existent que sous la forme de séries formelles *divergentes* !

On distingue deux types de moyennisation :

- Standard : Le choix le plus simple $\mathcal{A}\left[\Phi^\varepsilon\right] = \mathrm{id}$.
- **Stroboscopique :** Un choix moins direct $\Phi^\varepsilon_0 = \mathrm{id}$.

Le cas d'un problème autonome

On peut avoir envie de considérer un problème autonome, de la forme

$$\partial_t y^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} A(y^\varepsilon) + B(y^\varepsilon), \qquad y^\varepsilon(0) = y_0,$$

avec A qui engendre un θ-flot $(\theta, u) \mapsto \chi_\theta(u)$ périodique.

On se ramène à un problème canonique dit *problème filtré*, avec

$$g_\theta(u) = (\partial_u \chi_{-\theta} \cdot B) \circ \chi_\theta(u)$$

La variable filtrée u^ε s'écrit alors

$$u^\varepsilon(t) = \chi_{-t/\varepsilon}\big(y^\varepsilon(t)\big).$$

C'est cette variable qui admet un comportement limite bien défini.

Sommaire

Définition géométrique

On considère maintenant le problème en dimension finie,

$$X = \mathbb{R}^d,$$

et on s'intéresse aux propriétés géométriques de la moyennisation stroboscopique.

Pour les preuves, on se concentre sur le caractère *hamiltonien*.

Définition – Champ hamiltonien

On dit qu'un champ de vecteurs $(\theta, u) \mapsto g_\theta(u)$ est *hamiltonien* s'il est de la forme

$$g_\theta(u) = J^{-1}\,\nabla_u H_\theta(u) \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_\theta : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$$

Une application $u \mapsto \phi(u)$ est *symplectique* si elle préserve la structure, i.e.

$$\partial_u\phi(u)\, J^{-1} \big(\partial_u\phi(u)\big)^T = J^{-1}$$

Remarque : Un champ de vecteurs est hamiltonien si et seulement si le flot qu'il engendre est symplectique.

Cas linéaire

On considère d'abord le cas linéaire,

$$g_\theta(u) = A_\theta u.$$

Dans ce cas, les applications Φ^ε et G^ε sont bien définies pour ε petit, et elles sont linéaires.

Théorème – Conservation géométrique linéaire

Si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le champ $u \mapsto A_\theta u$, présente une propriété géométrique du type

1. trace nulle
2. invariant
3. hamiltonien
4. B-Poisson

alors pour ε petit, le champ moyen $u \mapsto G^\varepsilon u$ obtenu par moyennisation *stroboscopique* présente la même propriété.

Cas linéaire

On considère d'abord le cas linéaire,

$$g_\theta(u) = A_\theta u.$$

Dans ce cas, les applications Φ^ε et G^ε sont bien définies pour ε petit, et elles sont linéaires.

Théorème – Conservation géométrique linéaire

Si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le champ $u \mapsto A_\theta u$, présente une propriété géométrique du type

1. trace nulle
2. invariant
3. hamiltonien
4. B-Poisson

alors pour ε petit, le champ moyen $u \mapsto G^\varepsilon u$ obtenu par moyennisation *stroboscopique* présente la même propriété.

Preuve : Pour le cas hamiltonien, on a avec $S_t = \Psi_t^\varepsilon J^{-1} \left(\Psi_t^\varepsilon\right)^T$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t = G^\varepsilon S_t + S_t \left(G^\varepsilon\right)^T \qquad \text{où en outre} \qquad S_0 = S_\varepsilon = J^{-1}.$$

En posant $LM = G^\varepsilon M + M\left(G^\varepsilon\right)^T$, on a pour $\varepsilon |||L||| < \log(2)$,

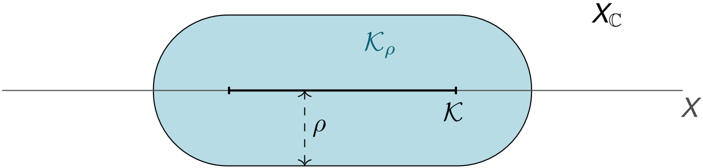
$$0 = (I - e^{\varepsilon L}) S_0 \quad \text{d'où} \quad 0 = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (I - e^{\varepsilon L})^k S_0 = -\log(e^{\varepsilon L}) S_0 = -\varepsilon L\, S_0. \quad ■$$

Hypothèse d'analyticité

Pour conduire notre analyse, on introduit les espaces

$$\mathcal{K}_\rho := \{u + \tilde{u}, \quad (u, \tilde{u}) \in \mathcal{K} \times X_\mathbb{C}, |\tilde{u}|_\mathbb{C} \le \rho\} .$$

ou encore graphiquement,

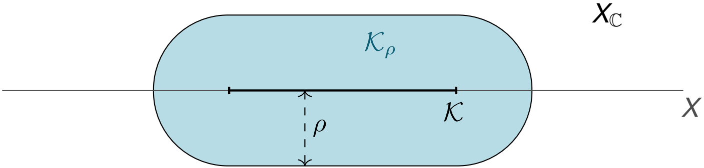


Hypothèse d'analyticité

Pour conduire notre analyse, on introduit les espaces

$$\mathcal{K}_\rho := \{u + \tilde{u}, \quad (u, \tilde{u}) \in \mathcal{K} \times X_{\mathbb{C}}, |\tilde{u}|_{\mathbb{C}} \leq \rho\}\,.$$

ou encore graphiquement,



Pour une fonction $u \in \mathcal{K}_\rho \mapsto \varphi(u)$, on définit la norme

$$\|\varphi\|_\rho = \sup_{u \in \mathcal{K}_\rho} |\varphi(u)|.$$

Hypothèse d'analyticité

Le champ $(\theta, u) \mapsto g_\theta(u)$ est u-analytique sur $\mathcal{K}$, de rayon partout $> 4R$. En outre,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \|g_\theta\|_{4R} \leq M.$$

Cas analytique – Résultat

Sous cette hypothèse d'analyticité, à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ on peut construire un développement asymptotique[1] avec $(\theta, u) \mapsto \Phi_\theta^{[n]}(u)$ et $u \mapsto G^{[n]}$ sur $\mathcal{K}_{3R}$, tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad \left| u^\varepsilon(t) - \Phi_{t/\varepsilon}^{[n]} \circ \Psi_t^{[n]}(u_0) \right| = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}),$$

pour tout rang $n \in \mathbb{N}$, à la condition $\varepsilon \leq \dfrac{\varepsilon_0}{n+1}$ avec $\varepsilon_0 = M/(4R)$. En outre,

$$\|G^{[n]}\|_{3R} \leq 2M.$$

---

[1] Castella, Chartier, Méhats, and Murua 2015

Cas analytique – Résultat

Sous cette hypothèse d'analyticité, à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ on peut construire un développement asymptotique[1] avec $(\theta, u) \mapsto \Phi_\theta^{[n]}(u)$ et $u \mapsto G^{[n]}$ sur $\mathcal{K}_{3R}$, tel que

$$\forall t \in [0,1], \quad \left| u^\varepsilon(t) - \Phi_{t/\varepsilon}^{[n]} \circ \Psi_t^{[n]}(u_0) \right| = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1}),$$

pour tout rang $n \in \mathbb{N}$, à la condition $\varepsilon \leq \dfrac{\varepsilon_0}{n+1}$ avec $\varepsilon_0 = M/(4R)$. En outre,

$$\|G^{[n]}\|_{3R} \leq 2M.$$

Théorème – Conservation géométrique analytique

Si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le flot généré par $u \mapsto g_\theta(u)$, présente une propriété géométrique du type

1. préserve le volume
2. préserve une fonctionnelle I
3. symplectique
4. B-symplectique

alors pour ε petit, le t-flot $(t, u) \mapsto \Psi_t^{[n]}(u)$ engendré par champ moyen $u \mapsto G^{[n]}(u)$ présente la même propriété à $\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$ près sur $\mathcal{K}_R$

---

[1] Castella, Chartier, Méhats, and Murua 2015

Cas analytique – Preuve 1 / 3

On définit B_t l'erreur de symplecticité,

$$B_t(u) = \partial_u \Psi_t^{[n]}(u)\, J^{-1} \left(\partial_u \Psi_t^{[n]}(u)\right)^T - J^{-1}.$$

Elle vérifie une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_t(u) = L_t(u) B_t(u) + S_t(u), \qquad \|B_0\|_{2R}, \|B_\varepsilon\|_{2R} \leq \alpha\varepsilon^{n+1}$$

avec $L_t(u)M = \partial_u G^{[n]}(u_t)M + M\left(\partial_u G^{[n]}(u_t)\right)^T$ où $u_t = \Psi_t^{[n]}(u)$, et $S_t = L_t J^{-1}$.

Propriétés :

$$\sup_{t\leq\varepsilon} |||L_t|||_{2R} \leq C \qquad \text{et} \qquad S_t(u) = S_0\left(\Psi_t^{[n]}(u)\right),$$

En particulier, L et S sont *transportés* par $G^{[n]}$.

Cas analytique – Preuve 1 / 3

On définit B_t l'erreur de symplecticité,

$$B_t(u) = \partial_u \Psi_t^{[n]}(u)\, J^{-1} \left(\partial_u \Psi_t^{[n]}(u)\right)^T - J^{-1}.$$

Elle vérifie une équation de la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_t(u) = L_t(u) B_t(u) + S_t(u), \qquad \|B_0\|_{2R}, \|B_\varepsilon\|_{2R} \leq \alpha\varepsilon^{n+1}$$

avec $L_t(u)M = \partial_u G^{[n]}(u_t) M + M\left(\partial_u G^{[n]}(u_t)\right)^T$ où $u_t = \Psi_t^{[n]}(u)$, et $S_t = L_t J^{-1}$.

Propriétés :

$$\sup_{t\leq\varepsilon} |||L_t|||_{2R} \leq C \qquad \text{et} \qquad S_t(u) = S_0\left(\Psi_t^{[n]}(u)\right),$$

En particulier, L et S sont *transportés* par $G^{[n]}$.

On montre $S_t = O(\varepsilon^n)$ pour en déduire
$B_t = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$.

En effet d'après le lemme de Gronwall,

$$\sup_{t\leq\varepsilon} \|B_t\|_R \leq \varepsilon \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t\leq\varepsilon} \|S_t\|_R\right) e^{\varepsilon C}$$

Cas analytique – Preuve 2 / 3

Par intégration de l'EDO sur B_t sur $[0, \varepsilon]$ et par inégalité triangulaire, on a

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t \right\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|L_t\|_R \mathrm{d}t \cdot \sup_{t \leq \varepsilon} \|B_t\|_R.$$

Cas analytique – Preuve 2 / 3

Par intégration de l'EDO sur B_t sur $[0, \varepsilon]$ et par inégalité triangulaire, on a

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t \right\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C}.$$

Cas analytique – Preuve 2 / 3

Par intégration de l'EDO sur B_t sur $[0, \varepsilon]$ et par inégalité triangulaire, on a

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t \right\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C}.$$

Par intégration par parties,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t = S_0 + \int_0^\varepsilon (1 - t/\varepsilon) \partial_t S_t \mathrm{d}t, \qquad \text{avec} \qquad \partial_t S_t = \partial_u S_t \cdot G^{[n]},$$

ce qui donne finalement

$$\|S_0\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C} + \frac{\varepsilon}{2} \sup_{t \leq \varepsilon} |||\partial_u S_t|||_R \cdot 2M$$

Cas analytique – Preuve 2 / 3

Par intégration de l'EDO sur B_t sur $[0, \varepsilon]$ et par inégalité triangulaire, on a

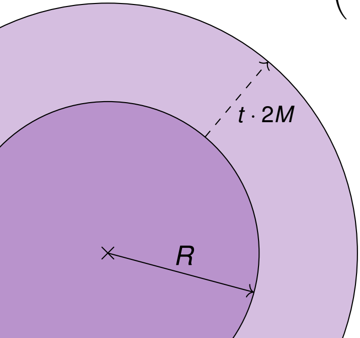
$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t \right\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t\leq\varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C}.$$

Par intégration par parties,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t = S_0 + \int_0^\varepsilon (1 - t/\varepsilon) \partial_t S_t \mathrm{d}t, \qquad \text{avec} \qquad \partial_t S_t = \partial_u S_t \cdot G^{[n]},$$

ce qui donne finalement

$$\|S_0\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t\leq\varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C} + \frac{\varepsilon}{2} \sup_{t\leq\varepsilon} \|\!|\partial_u S_t|\!\|_R \cdot 2M$$



On exploite le caractère transporté de S, i.e. l'identité $S_t = S_0 \circ \Psi_t^{[n]}$.

Cas analytique – Preuve 2 / 3

Par intégration de l'EDO sur B_t sur $[0, \varepsilon]$ et par inégalité triangulaire, on a

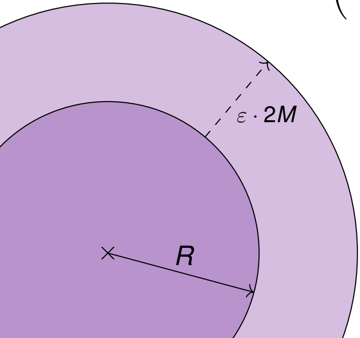
$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} S_t \mathrm{d}t \right\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C}.$$

Par intégration par parties,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} S_t \mathrm{d}t = S_0 + \int_0^{\varepsilon} (1 - t/\varepsilon) \partial_t S_t \mathrm{d}t, \qquad \text{avec} \qquad \partial_t S_t = \partial_u S_t \cdot G^{[n]},$$

ce qui donne finalement

$$\|S_0\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C} + \frac{\varepsilon}{2} \sup_{t \leq \varepsilon} \|\!|\partial_u S_t|\!\|_R \cdot 2M$$



On exploite le caractère transporté de S, i.e. l'identité $S_t = S_0 \circ \Psi_t^{[n]}$.

Cas analytique – Preuve 2 / 3

Par intégration de l'EDO sur B_t sur $[0, \varepsilon]$ et par inégalité triangulaire, on a

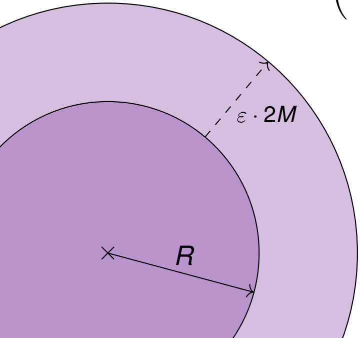
$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t \right\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C}.$$

Par intégration par parties,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t = S_0 + \int_0^\varepsilon (1 - t/\varepsilon) \partial_t S_t \mathrm{d}t, \qquad \text{avec} \qquad \partial_t S_t = \partial_u S_t \cdot G^{[n]},$$

ce qui donne finalement

$$\|S_0\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C} + \frac{\varepsilon}{2} \sup_{t \leq \varepsilon} \|\partial_u S_t\|_R \cdot 2M$$



On exploite le caractère transporté de S, i.e. l'identité $S_t = S_0 \circ \Psi_t^{[n]}$.

On définit

$$r_n = \frac{R}{n+1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \frac{r_n}{4M}.$$

Alors pour $t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_n$, on a $\Psi_t^{[n]}(u) \in \mathcal{K}_{R + r_n/2}$, donc

$$\sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \leq \|S_0\|_{R + r_n/2} \leq \|S_0\|_{R + r_n}$$

Cas analytique – Preuve 2 / 3

Par intégration de l'EDO sur B_t sur $[0, \varepsilon]$ et par inégalité triangulaire, on a

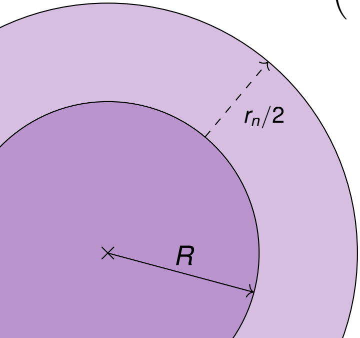
$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} S_t \mathrm{d}t \right\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t\leq\varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C}.$$

Par intégration par parties,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} S_t \mathrm{d}t = S_0 + \int_0^{\varepsilon} (1 - t/\varepsilon) \partial_t S_t \mathrm{d}t, \qquad \text{avec} \qquad \partial_t S_t = \partial_u S_t \cdot G^{[n]},$$

ce qui donne finalement

$$\|S_0\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t\leq\varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C} + \frac{\varepsilon}{2} \sup_{t\leq\varepsilon} |||\partial_u S_t|||_R \cdot 2M$$



On exploite le caractère transporté de S, i.e. l'identité $S_t = S_0 \circ \Psi_t^{[n]}$.

On définit

$$r_n = \frac{R}{n+1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \frac{r_n}{4M}.$$

Alors pour $t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_n$, on a $\Psi_t^{[n]}(u) \in \mathcal{K}_{R+r_n/2}$, donc

$$\sup_{t\leq\varepsilon} \|S_t\|_R \leq \|S_0\|_{R+r_n/2} \leq \|S_0\|_{R+r_n}$$

Cas analytique – Preuve 2 / 3

Par intégration de l'EDO sur B_t sur $[0, \varepsilon]$ et par inégalité triangulaire, on a

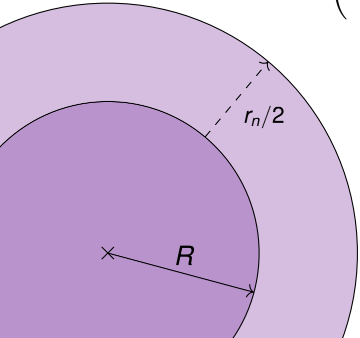
$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t \right\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C}.$$

Par intégration par parties,

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S_t \mathrm{d}t = S_0 + \int_0^\varepsilon (1 - t/\varepsilon) \partial_t S_t \mathrm{d}t, \qquad \text{avec} \qquad \partial_t S_t = \partial_u S_t \cdot G^{[n]},$$

ce qui donne finalement

$$\|S_0\|_R \leq 2\alpha\varepsilon^n + \left(\alpha\varepsilon^n + \sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \right) \varepsilon C e^{\varepsilon C} + \frac{\varepsilon}{2} \sup_{t \leq \varepsilon} |||\partial_u S_t|||_R \cdot 2M$$



On exploite le caractère transporté de S, i.e. l'identité $S_t = S_0 \circ \Psi_t^{[n]}$.

On définit

$$r_n = \frac{R}{n+1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \frac{r_n}{4M}.$$

Alors pour $t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_n$, on a $\Psi_t^{[n]}(u) \in \mathcal{K}_{R+r_n/2}$, donc

$$\sup_{t \leq \varepsilon} \|S_t\|_R \leq \|S_0\|_{R+r_n/2} \leq \|S_0\|_{R+r_n}$$

Cas analytique – Preuve 3 / 3

Estimation de Cauchy

Si φ est analytique et bornée sur $\mathcal{K}_{\rho+\delta}$, alors on a

$$|||\partial_u \varphi|||_\rho \leq \frac{1}{\delta} \|\varphi\|_{\rho+\delta}.$$

Cas analytique – Preuve 3 / 3

Estimation de Cauchy

Si φ est analytique et bornée sur $\mathcal{K}_{\rho+\delta}$, alors on a

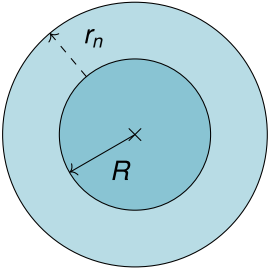
$$|||\partial_u \varphi|||_\rho \leq \frac{1}{\delta} \|\varphi\|_{\rho+\delta}.$$

Par application directe de cette estimation,

$$|||\partial_u S_t|||_R \leq \frac{2}{r_n} \|S_t\|_{R+r_n/2} \leq \frac{2}{r_n} \|S_0\|_{R+r_n}.$$

On obtient finalement une estimation de la forme

$$\|S_0\|_R \leq \kappa \left(\varepsilon^n + \frac{\varepsilon}{\varepsilon n} \|S_0\|_{R+r_n} \right),$$



(dessin à échelle libre, $r_n = R/(n+1)$)

Cas analytique – Preuve 3 / 3

Estimation de Cauchy

Si φ est analytique et bornée sur $\mathcal{K}_{\rho+\delta}$, alors on a

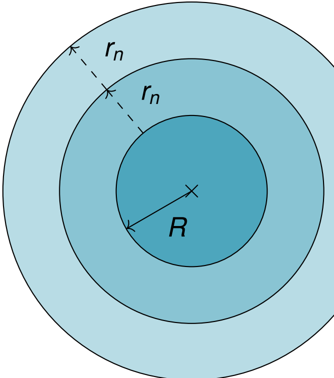
$$|||\partial_u \varphi|||_\rho \leq \frac{1}{\delta} \|\varphi\|_{\rho+\delta}.$$

Par application directe de cette estimation,

$$|||\partial_u S_t|||_R \leq \frac{2}{r_n} \|S_t\|_{R+r_n/2} \leq \frac{2}{r_n} \|S_0\|_{R+r_n}.$$

On obtient finalement une estimation de la forme

$$\|S_0\|_R \leq \kappa \left(\varepsilon^n + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} \|S_0\|_{R+r_n} \right),$$



(dessin à échelle libre, $r_n = R/(n+1)$)

Cas analytique – Preuve 3 / 3

Estimation de Cauchy

Si φ est analytique et bornée sur $\mathcal{K}_{\rho+\delta}$, alors on a

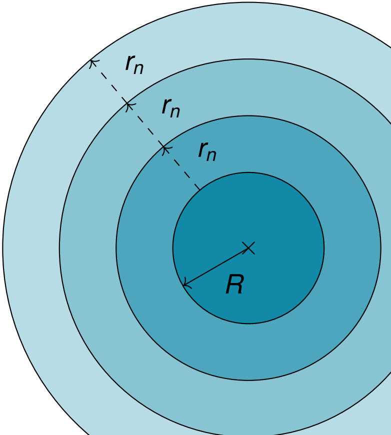
$$\left\vert\left\vert\left\vert \partial_u \varphi \right\vert\right\vert\right\vert_\rho \leq \frac{1}{\delta} \left\Vert \varphi \right\Vert_{\rho+\delta}.$$

Par application directe de cette estimation,

$$\left\vert\left\vert\left\vert \partial_u S_t \right\vert\right\vert\right\vert_R \leq \frac{2}{r_n} \left\Vert S_t \right\Vert_{R+r_n/2} \leq \frac{2}{r_n} \left\Vert S_0 \right\Vert_{R+r_n}.$$

On obtient finalement une estimation de la forme

$$\left\Vert S_0 \right\Vert_R \leq \kappa \left(\varepsilon^n + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} \left\Vert S_0 \right\Vert_{R+r_n} \right),$$



(dessin à échelle libre, $r_n = R/(n+1)$)

Cas analytique – Preuve 3 / 3

Estimation de Cauchy

Si φ est analytique et bornée sur $\mathcal{K}_{\rho+\delta}$, alors on a

$$\left\|\!\left|\partial_u \varphi\right|\!\right\|_{\rho} \leq \frac{1}{\delta} \|\varphi\|_{\rho+\delta}.$$

Par application directe de cette estimation,

$$\left\|\!\left|\partial_u S_t\right|\!\right\|_R \leq \frac{2}{r_n} \|S_t\|_{R+r_n/2} \leq \frac{2}{r_n} \|S_0\|_{R+r_n}.$$

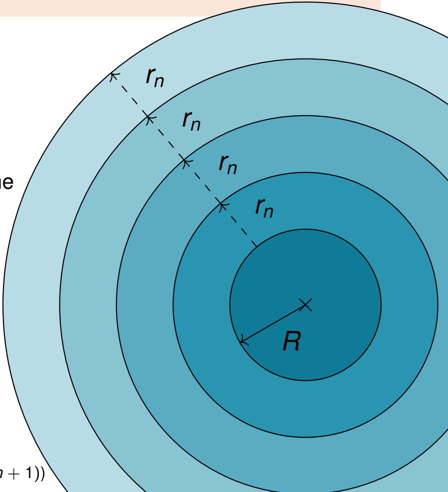
On obtient finalement une estimation de la forme

$$\|S_0\|_R \leq \kappa \left(\varepsilon^n + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} \|S_0\|_{R+r_n} \right),$$

et donc de proche en proche,

$$\|S_0\|_R \leq \left(\kappa \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} \right)^n \|S_0\|_{2R-r_n} + \mathcal{O}(\varepsilon^n).$$

■



(dessin à échelle libre, $r_n = R/(n+1)$)

Sommaire

Description du problème

On cherche à résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t x = & a(x,z), & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{d_x} \\ \partial_t z = & -\dfrac{\Lambda}{\varepsilon} z + b(x,z), & z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^{d_z} \end{cases}$$

sur $[0, T]$ pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ (pas forcément petit), avec a, b analytiques. La matrice Λ est un terme de relaxation (de dynamique des populations, collisions cinétiques, etc).

Description du problème

On cherche à résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t x = & a(x,z), & x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{d_x} \\ \partial_t z = & -\frac{\Lambda}{\varepsilon} z + b(x,z), & z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^{d_z} \end{cases}$$

sur $[0, T]$ pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ (pas forcément petit), avec a, b analytiques. La matrice Λ est un terme de relaxation (de dynamique des populations, collisions cinétiques, etc).

En posant $u = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$, on peut écrire le problème sous forme plus compacte

$$\boxed{\partial_t u = -\frac{A}{\varepsilon} u + f(u), \qquad u(0) = u_0.} \tag{1}$$

Hypothèses

1. Le champ de vecteur $u \mapsto f(u)$ est analytique ;
2. La matrice A est diagonale semi-définie positive ;
3. Les valeurs propres de A sont *entières*.

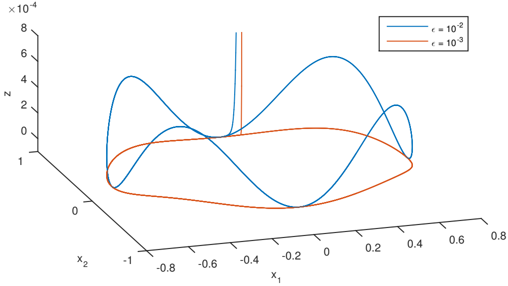
Comportement

Théorème de variété centrale :

Il existe un taux $\nu > 0$ et une application $x \mapsto \varepsilon h^{\varepsilon}(x)$ tels que la solution (x, z) vérifie

$$\left| z(t) - \varepsilon h^{\varepsilon}\left(x(t)\right) \right| \lesssim e^{-\nu t/\varepsilon}.$$

Ainsi, pour $t \gtrsim \varepsilon \log(1/\varepsilon)$, la dynamique est *non-raide* et z est de taille $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

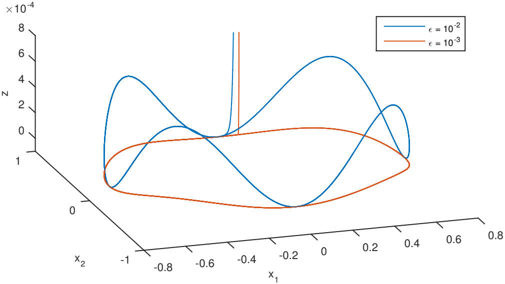


Comportement

Théorème de variété centrale :
Il existe un taux $\nu > 0$ et une application $x \mapsto \varepsilon h^{\varepsilon}(x)$ tels que la solution (x, z) vérifie

$$\left| z(t) - \varepsilon h^{\varepsilon}\left(x(t)\right) \right| \lesssim e^{-\nu t/\varepsilon}.$$

Ainsi, pour $t \gtrsim \varepsilon \log(1/\varepsilon)$, la dynamique est *non-raide* et z est de taille $\mathcal{O}(\varepsilon)$.



Conséquence: Pour une erreur numérique $e_i = u(t_i) - u_i$, on considère la norme

$$\boxed{|e_i|_{\varepsilon} := \left| \left(\mathrm{id} + \frac{A}{\varepsilon} \right) e_i \right|,}$$

ce qui renormalise la composante z par $1/\varepsilon$ sans modifier la composante x.

Sommaire

L'équation homologique

Supposons qu'on peut écrire

$$u(t) = \Omega^\varepsilon_{t/\varepsilon}\big(v^\varepsilon(t)\big) \quad \text{avec} \quad \dot{v} = F^\varepsilon(v).$$

En injectant cet ansatz dans $\partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon} Au + f(u)$ on obtient l'équation homologique

$$\partial_\tau \Omega^\varepsilon_\tau(u) + A\Omega^\varepsilon_\tau(u) = \varepsilon\Big(\underbrace{f \circ \Omega^\varepsilon_\tau(u) - \partial_u \Omega^\varepsilon_\tau(u) F^\varepsilon(u)}_{\Lambda[\Omega^\varepsilon]_\tau}\Big).$$

L'équation homologique

Supposons qu'on peut écrire

$$u(t) = \Omega^{\varepsilon}_{t/\varepsilon}\big(v^{\varepsilon}(t)\big) \quad \text{avec} \quad \dot{v} = F^{\varepsilon}(v).$$

En injectant cet ansatz dans $\partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon} A u + f(u)$ on obtient l'équation homologique

$$\partial_\tau \Omega^{\varepsilon}_{\tau}(u) + A\Omega^{\varepsilon}_{\tau}(u) = \varepsilon \Big(\underbrace{f \circ \Omega^{\varepsilon}_{\tau}(u) - \partial_u \Omega^{\varepsilon}_{\tau}(u) F^{\varepsilon}(u)}_{\Lambda[\Omega^{\varepsilon}]_{\tau}} \Big).$$

Avec un projecteur $\langle \cdot \rangle$ parallèle à l'image de $\partial_\tau + A$, on peut choisir

$$\langle \Omega^{\varepsilon} \rangle = \mathrm{id} \qquad \text{et alors} \qquad F^{\varepsilon} = \langle f \circ \Omega^{\varepsilon} \rangle.$$

Ici, le projecteur $\langle \cdot \rangle$ extrait la composante en $\tau \mapsto e^{-\tau A}$ d'une série exponentielle.

L'équation homologique

Supposons qu'on peut écrire

$$u(t) = \Omega^{\varepsilon}_{t/\varepsilon}\big(v^{\varepsilon}(t)\big) \quad \text{avec} \quad \dot{v} = F^{\varepsilon}(v).$$

En injectant cet ansatz dans $\partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon} Au + f(u)$ on obtient l'équation homologique

$$\partial_\tau \Omega^{\varepsilon}_{\tau}(u) + A\Omega^{\varepsilon}_{\tau}(u) = \varepsilon\Big(\underbrace{f \circ \Omega^{\varepsilon}_{\tau}(u) - \partial_u \Omega^{\varepsilon}_{\tau}(u) F^{\varepsilon}(u)}_{\Lambda[\Omega^{\varepsilon}]_\tau}\Big).$$

Avec un projecteur $\langle \cdot \rangle$ parallèle à l'image de $\partial_\tau + A$, on peut choisir

$$\langle \Omega^{\varepsilon} \rangle = \mathrm{id} \qquad \text{et alors} \qquad F^{\varepsilon} = \langle f \circ \Omega^{\varepsilon} \rangle.$$

Ici, le projecteur $\langle \cdot \rangle$ extrait la composante en $\tau \mapsto e^{-\tau A}$ d'une série exponentielle.

On effectue un développement asymptotique itérativement en posant

$$(\partial_\tau + A)\Omega^{[n+1]}_{\tau} = \varepsilon \Lambda[\Omega^{[n]}]_\tau, \qquad \Omega^{[0]}_{\tau} = e^{-\tau A} \quad \text{et} \quad F^{[n]} = \langle f \circ \Omega^{[n]} \rangle.$$

Propriétés du développement asymptotique

On définit $\eta_\tau^{[n]}$ le défaut, i.e. l'erreur dans l'équation homologique sur $\Omega^{[n]}$, $F^{[n]}$,

$$\eta_\tau^{[n]} = \frac{1}{\varepsilon}(\partial_\tau + A)\Omega_\tau^{[n]} - \left(f \circ \Omega_\tau^{[n]} - \partial_u \Omega_\tau^{[n]} \cdot F^{[n]}\right).$$

Théorème – Propriétés de l'approximation

Avec ces définitions, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0/(n+1)$, les applications $\Omega^{[n]}$, $F^{[n]}$ et $\eta^{[n]}$ sont bien définies et sont u-analytiques. En outre,

1. Le changement de variable $\tau \mapsto \Omega_\tau^{[n]}$ est proche de $\tau \mapsto e^{-\tau A}$ au sens
$$\partial_\tau^\alpha \left(\Omega_\tau^{[n]} - e^{-\tau A}\right) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$
2. Le champ de vecteurs $F^{[n]}$ est borné indép. de ε (i.e. il est non-raide)
3. Le défaut et ses dérivées $\partial_\tau^\alpha \eta^{[n]}$ sont de taille $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$, et $\langle \eta^{[n]} \rangle = 0$.

Idée de la preuve

Étant donné une série exponentielle $\varphi_\tau = \sum_{k\geq 0} \alpha_k e^{-k\tau} = \left[\sum_{k\geq 0} \alpha_k \xi^k\right]_{|\xi = e^{-\tau}}$, le projecteur $\langle \cdot \rangle$ est donné par

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k\geq 0} e^{i(k-A)\theta} \alpha_k \Big) \mathrm{d}\theta = \mathcal{A}[e^{-iA\bullet} \varphi_{i\bullet}].$$

---

[2] Chartier, Lemou, Méhats, and Vilmart 2020

Idée de la preuve

Étant donné une série exponentielle $\varphi_\tau = \sum_{k\geq 0} \alpha_k e^{-k\tau} = \left[\sum_{k\geq 0} \alpha_k \xi^k\right]\Big|_{\xi=e^{-\tau}}$, le projecteur $\langle \cdot \rangle$ est donné par

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k\geq 0} e^{i(k-A)\theta}\alpha_k\Big) d\theta = \mathcal{A}[e^{-iA\bullet}\varphi_{i\bullet}].$$

$\Longrightarrow$ On se ramène à un problème hautement oscillant

$$\partial_t y = \frac{i}{\varepsilon} A y - i f(y).$$

On peut faire une construction de moyennisation,[2]

$$y(t) = \Phi^{[n]}_{t/\varepsilon} \circ \Psi^{[n]}_t \circ \big(\Phi^{[n]}_0\big)^{-1}(y_0),$$

avec $\mathrm{d}_t \Psi^{[n]}_t = G^{[n]} \circ \Psi^{[n]}_t$ et $\mathcal{A}\big[e^{-iA\bullet}\,\Phi^{[n]}\big] = \mathrm{id}$.

---

[2] Chartier, Lemou, Méhats, and Vilmart 2020

Idée de la preuve

Étant donné une série exponentielle $\varphi_\tau = \sum_{k\geq 0} \alpha_k e^{-k\tau} = \left[\sum_{k\geq 0} \alpha_k \xi^k\right]\Big|_{\xi = e^{-\tau}}$, le projecteur $\langle \cdot \rangle$ est donné par

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k\geq 0} e^{i(k-A)\theta}\alpha_k\Big) \mathrm{d}\theta = \mathcal{A}[e^{-iA\bullet}\varphi_{i\bullet}].$$

$\Longrightarrow$ On se ramène à un problème hautement oscillant

$$\partial_t y = \frac{i}{\varepsilon} A y - i f(y).$$

On peut faire une construction de moyennisation,[2]

$$y(t) = \Phi^{[n]}_{t/\varepsilon} \circ \Psi^{[n]}_t \circ \left(\Phi^{[n]}_0\right)^{-1}(y_0),$$

avec $\mathrm{d}_t \Psi^{[n]}_t = G^{[n]} \circ \Psi^{[n]}_t$ et $\mathcal{A}\left[e^{-iA\bullet}\, \Phi^{[n]}\right] = \mathrm{id}$.

On exploite ainsi les résultats sur les problèmes hautement oscillant.

---

[2] Chartier, Lemou, Méhats, and Vilmart 2020

Idée de la preuve

Étant donné une série exponentielle $\varphi_\tau = \sum_{k\geq 0} \alpha_k e^{-k\tau} = \left[\sum_{k\geq 0} \alpha_k \xi^k\right]_{|\xi=e^{-\tau}}$, le projecteur $\langle\cdot\rangle$ est donné par

$$\langle\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k\geq 0} e^{i(k-A)\theta}\alpha_k\Big) \mathrm{d}\theta = \mathcal{A}[e^{-iA\bullet}\varphi_{i\bullet}].$$

⟹ On se ramène à un problème hautement oscillant

$$\partial_t y = \frac{i}{\varepsilon} Ay - if(y).$$

On peut faire une construction de moyennisation,[2]

$$y(t) = \Phi^{[n]}_{t/\varepsilon} \circ \Psi^{[n]}_t \circ \left(\Phi^{[n]}_0\right)^{-1}(y_0),$$

avec $\mathrm{d}_t \Psi^{[n]}_t = G^{[n]} \circ \Psi^{[n]}_t$ et $\mathcal{A}\left[e^{-iA\bullet}\,\Phi^{[n]}\right] = \mathrm{id}$.

On exploite ainsi les résultats sur les problèmes hautement oscillant.

On reconstruit ensuite les applications du problème de relaxation avec

$$\Omega^{[n]}_\tau = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-k\tau} c_k\left(\Phi^{[n]}\right) \quad \text{et} \quad F^{[n]} = iG^{[n]},$$

avec c_k les coefficients de Fourier. Moralement, $\Omega^{[n]}_\tau = \Phi^{[n]}_{i\tau}$.

---

[2] Chartier, Lemou, Méhats, and Vilmart 2020

Problème micro-macro

On décompose maintenant la solution du problème d'origine en deux parties,

$$u(t) = \Omega_{t/\varepsilon}^{[n]}\big(v(t)\big) + w(t) \quad \text{avec} \quad \partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon}Au + f(u).$$

On étudie alors le problème micro-macro en (v, w), qui s'écrit

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t v = F^{[n]}(v), \\ \partial_t w = -\dfrac{1}{\varepsilon}Aw + L\left(\Omega_{t/\varepsilon}^{[n]}(v), w\right) w - \eta_{t/\varepsilon}^{[n]}(v), \end{cases}}$$

avec comme conditions initiales $v(0) = (\Omega_0^{[n]})^{-1}(u_0)$, $w(0) = 0$, et où

$$L(v, w)w = f\,(v + w) - f\,(v) \; = \left(\int_0^1 \partial_u f\,(v + \mu w)\,\mathrm{d}\mu\right) w$$

Problème micro-macro

On décompose maintenant la solution du problème d'origine en deux parties,

$$u(t) = \Omega^{[n]}_{t/\varepsilon}\big(v(t)\big) + w(t) \quad \text{avec} \quad \partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon} A u + f(u).$$

On étudie alors le problème micro-macro en (v, w), qui s'écrit

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t v = F^{[n]}(v), \\ \partial_t w = -\dfrac{1}{\varepsilon} A w + L\left(\Omega^{[n]}_{t/\varepsilon}(v), w\right) w - \eta^{[n]}_{t/\varepsilon}(v), \end{cases}}$$

avec comme conditions initiales $v(0) = (\Omega^{[n]}_0)^{-1}(u_0)$, $w(0) = 0$, et où

$$L(v, w) w = f\,(v + w) - f\,(v) \ = \left(\int_0^1 \partial_u f\,(v + \mu w)\,\mathrm{d}\mu\right) w$$

Problème micro-macro

On décompose maintenant la solution du problème d'origine en deux parties,

$$u(t) = \Omega_{t/\varepsilon}^{[n]}\big(v(t)\big) + w(t) \quad \text{avec} \quad \partial_t u = -\frac{1}{\varepsilon} A u + f(u).$$

On étudie alors le problème micro-macro en (v, w), qui s'écrit

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t v = F^{[n]}(v), \\ \partial_t w = -\dfrac{1}{\varepsilon} A w + L\left(\Omega_{t/\varepsilon}^{[n]}(v), w\right) w - \eta_{t/\varepsilon}^{[n]}(v), \end{cases}}$$

avec comme conditions initiales $v(0) = (\Omega_0^{[n]})^{-1}(u_0)$, $w(0) = 0$, et où

$$L(v, w) w = f\,(v + w) - f\,(v) \; = \left(\int_0^1 \partial_u f\,(v + \mu w)\,\mathrm{d}\mu\right) w$$

Théorème – Propriétés du problème micro-macro

Le problème est bien posé jusqu'à un temps indépendant de ε et n, et

(i)	v est régulière et bornée	(ii)	$\|w\|_\infty = \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$
(iii)	$\|\partial_t^\alpha E^{[n]}\|_\infty = \mathcal{O}(\varepsilon^{n-\alpha})$	(iv)	$\|\partial_t^{\alpha+1} E^{[n]}\|_{L^1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{n-\alpha})$

avec $E^{[n]} = \partial_t w + \frac{1}{\varepsilon} A w$ et $\alpha \in \mathbb{N}$.

Sommaire

Précision uniforme des schémas exponentiels

On résout le problème numériquement à des temps (t_i) avec un pas de temps Δt,

$$\begin{cases} \partial_t v = F^{[n]}(v), \\ \partial_t w = -\frac{1}{\varepsilon} A w + L\left(\Omega^{[n]}_{t/\varepsilon}(v), w\right) w - \eta^{[n]}_{t/\varepsilon}(v) \end{cases}$$

Théorème – Précision uniforme

Après calcul de la solution (v_i, w_i) avec un schéma exponentiel RK (ERK) d'ordre $n+1$, l'erreur sur la reconstruction $u_i = \Omega^{[n]}_{t_i/\varepsilon}(v_i) + w_i$ est *uniforme* d'ordre $n+1$, i.e.

$$\sup_{0 \le i \le N} \left| u(t_i) - u_i \right|_\varepsilon \le C \Delta t^{n+1}.$$

avec C indépendante de ε et $|e|_\varepsilon = \left| \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} A\right) e \right|$.

---

[3] Hochbruck and Ostermann 2004

Précision uniforme des schémas exponentiels

On résout le problème numériquement à des temps (t_i) avec un pas de temps Δt,

$$\begin{cases} \partial_t v = F^{[n]}(v), \\ \partial_t w = -\frac{1}{\varepsilon} A w + L\left(\Omega^{[n]}_{t/\varepsilon}(v), w\right) w - \eta^{[n]}_{t/\varepsilon}(v) \end{cases}$$

Théorème – Précision uniforme

Après calcul de la solution (v_i, w_i) avec un schéma exponentiel RK (ERK) d'ordre $n+1$, l'erreur sur la reconstruction $u_i = \Omega^{[n]}_{t_i/\varepsilon}(v_i) + w_i$ est *uniforme* d'ordre $n+1$, i.e.

$$\sup_{0 \le i \le N} \left| u(t_i) - u_i \right|_\varepsilon \le C \Delta t^{n+1}.$$

avec C indépendante de ε et $|e|_\varepsilon = \left| \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} A\right) e \right|$.

Preuve : L'erreur sur w peut être quantifiée[3] à l'aide de $E^{[n]} = \partial_t w + \frac{1}{\varepsilon} A w$,

$$\left| w(t_i) - w_i \right|_\varepsilon \le C \Delta t^{n+1} \left(\|\partial_t^n E^{[n]}\|_\infty + \|\partial_t^{n+1} E^{[n]}\|_{L^1} \right)$$

et d'autre part comme v est non-raide, son erreur vérifie $|v(t_i) - v_i| \le C \Delta t^{n+1} \cdot t_i$, d'où

$$\left| \Omega^{[n]}_{t_i/\varepsilon}(v(t_i)) - \Omega^{[n]}_{t_i/\varepsilon}(v_i) \right|_\varepsilon \le \widetilde{C} \Delta t^{n+1} \cdot t_i + \frac{t_i}{\varepsilon} A e^{-\frac{t_i}{\varepsilon} A} \cdot C \Delta t^{n+1}$$

---

[3] Hochbruck and Ostermann 2004

Exemple avec oscillations lentes

On vérifie ce résultat sur le cas jouet non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-z)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \\ \dot{z} = -\dfrac{1}{\varepsilon} z + x_1^2 x_2^2. \end{cases}$$

Après résolution du problème micro-macro aux ordres $n = 1, 2$ avec un schéma ERK, on reconstruit $u_i = \Omega^{[n]}_{t_i/\varepsilon}(v_i) + w_i$ et on trace l'erreur *uniforme*.

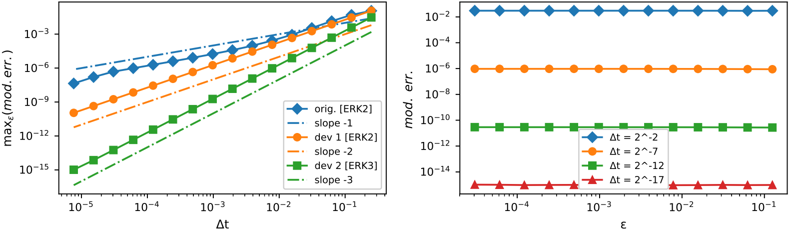


Figure: Maximum d'erreur pour $\varepsilon = 2^{-k}$ ($k = 3, \ldots, 15$) en fonction de Δt (gauche), et erreur en fonction de ε pour différentes valeurs de Δt dans le cas $n = 2$ avec un schéma ERK3 (droite).

L'équation du télégraphe – Présentation

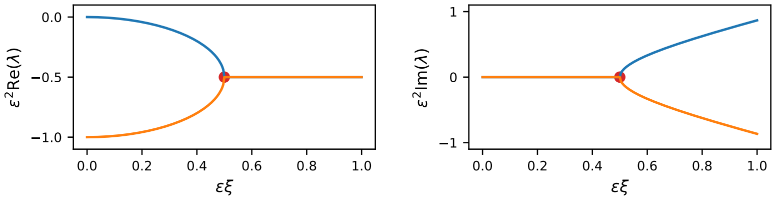
On cherche maintenant à appliquer cette méthode à l'équation du télégraphe

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x j = 0, \\ \partial_t j + \dfrac{1}{\varepsilon^2} \partial_x \rho = -\dfrac{1}{\varepsilon^2} j, \end{cases}$$

qui correspond à l'équation de BGK avec $v \in \{-1, 1\}$. En supposant des conditions périodiques aux bords, on écrit le problème en coefficients de Fourier (sans chapeau),

$$\begin{cases} \partial_t \rho + i\xi j = 0, \\ \partial_t j + \dfrac{i\xi}{\varepsilon^2} \rho = -\dfrac{1}{\varepsilon^2} j. \end{cases}$$

Dans ce cas, on peut tracer les valeurs propres exactes du problème.



L'équation du télégraphe – Développement

Pour démarrer le développement micro-macro, on choisit une variable z appropriée

$$z = j + \frac{i\xi}{1+\kappa\varepsilon^2\xi^2}\rho.$$

Ceci correspond à une relaxation de type *Rosenau*.[4]

Le problème micro-macro à l'ordre 1 requiert une relaxation supplémentaire,

$$\Omega_\tau^{[1]}(\rho, z) = \begin{pmatrix} \rho \\ e^{-\tau} z \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2}{1+\kappa\varepsilon^2\xi^2}\left(\cdots\right).$$

On obtient alors un champ $F^{[1]}$ raide, mais *stable* et diagonal

$$\varepsilon^2 F^{[1]}(\rho, z) = \frac{\varepsilon^2\xi^2}{1+\kappa\varepsilon^2\xi^2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2\xi^2}{1+\kappa\varepsilon^2\xi^2}\left(\kappa + \frac{1}{1+\kappa\varepsilon^2\xi^2}\right)\right)\begin{pmatrix} -\rho \\ z \end{pmatrix}.$$

Ce raisonnement ne peut pas être étendu tel quel aux ordres supérieurs.

---

[4] Schochet and Tadmor 1992

L'équation du télégraphe – Visualisation

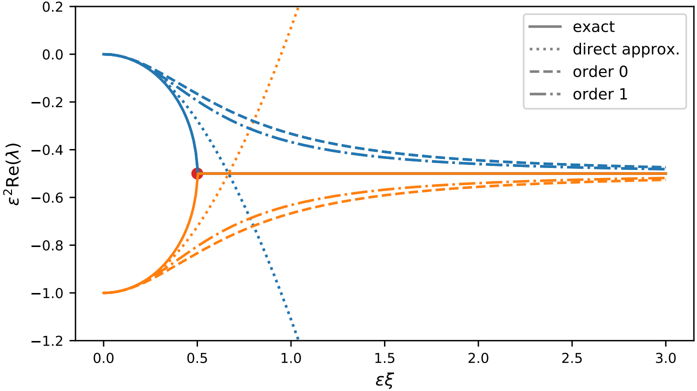


Figure: Partie réelle des valeurs propres de l'équation du télégraphe et leur approximation après développement micro-macro.

L'équation du télégraphe – Résultats

Avec cet développement micro-macro d'ordre 1, on peut résoudre l'équation du télégraphe avec un ordre de convergence amélioré *si la partie macro est exacte*.

On choisit des données initiales arbitraires régulières,

$$\rho(0,x) = e^{\cos(x)}, \qquad \text{et} \qquad j(0,x) = \frac{1}{2}\cos^3(x),$$

et la convergence est donnée dans la figure suivante.

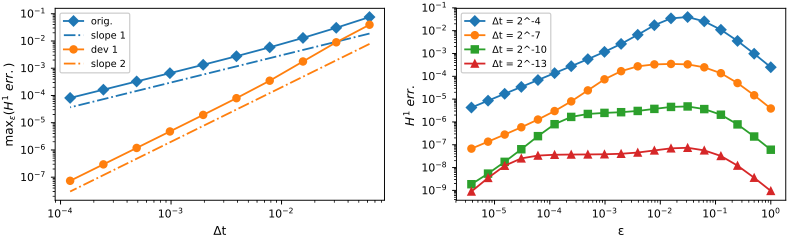


Figure: Maximum d'erreur H^1 pour $\varepsilon = 2^{-k}$ ($k = 0, \ldots, 18$) en fonction de Δt (gauche), et erreur en fonction de ε pour différentes valeurs de Δt avec la méthode micro-macro et un schéma ERK2 (droite).

Conclusion

Moyennisation :

- ✓ Nouvelles preuves *sans construire* de développement asymptotique
- ✓ Géométrie et commutation à $\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$ près
- ✗ Géométrie de moyennisation exacte non traitée

Relaxation rapide :

- ✓ Lien avec la moyennisation
- ✓ Développement asymptotique à un ordre arbitraire
- ✓ Amélioration de l'ordre de convergence
- ≈ Extension partielle à des EDP
- ✗ Ordre restreint pour les EDP

Conclusion

Moyennisation :

- ✓ Nouvelles preuves *sans construire* de développement asymptotique
- ✓ Géométrie et commutation à $\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$ près
- ✗ Géométrie de moyennisation exacte non traitée

Relaxation rapide :

- ✓ Lien avec la moyennisation
- ✓ Développement asymptotique à un ordre arbitraire
- ✓ Amélioration de l'ordre de convergence
- ≈ Extension partielle à des EDP
- ✗ Ordre restreint pour les EDP

Publication :

- P. Chartier, M. Lemou, L. T. *A uniformly accurate numerical method for a class of dissipative systems*, Math. Comp. (2021)

Conclusion

Moyennisation :

- ✓ Nouvelles preuves *sans construire* de développement asymptotique
- ✓ Géométrie et commutation à $\mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$ près
- ✗ Géométrie de moyennisation exacte non traitée

Relaxation rapide :

- ✓ Lien avec la moyennisation
- ✓ Développement asymptotique à un ordre arbitraire
- ✓ Amélioration de l'ordre de convergence
- ♒ Extension partielle à des EDP
- ✗ Ordre restreint pour les EDP

Publication :

- P. Chartier, M. Lemou, L. T. *A uniformly accurate numerical method for a class of dissipative systems*, Math. Comp. (2021)

Perspectives :

- Multiplicateurs de Fourier pour des problèmes hyperboliques avec relaxation
- Résultats existant pour les problèmes hautement oscillant
  - Extension aux valeurs propres non résonantes
  - Calcul micro-macro automatique, sans dérivée

Merci pour votre attention !