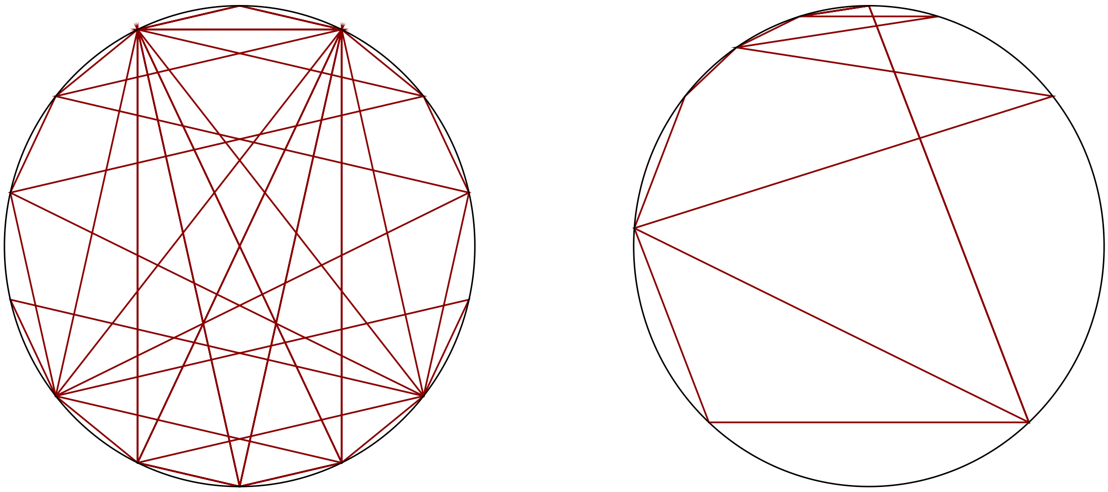
OL2 Projet bonus : Période de Pisano

Ce sujet est inspiré par la superbe vidéo de Jacob Yatsko, "A New Way to Look at Fibonacci Numbers" (https://www.youtube.com/watch?v=o1eLKODSCqw). L'auteur y présente un type de visualisation de la suite de Fibonacci en plaçant les points de la suite sur un cercle. L'intérêt de ce travail n'est pas pratique mais esthétique, comme on peut le voir ci-dessous.



(a) Fibonacci modulo 14 (b) Fibonacci modulo 21

L'objectif de ce TP est d'utiliser Scilab pour reproduire des figures comme celles-ci, et de fournir une base de code solide pour obtenir des figures similaires à partir de suites autres que celle de Fibonacci.

La difficulté et l'importance des questions sont démarquées :

- ▶ pour celles « standardes » ;
- ♥ pour celles qui sont difficiles mais valorisées ;
- ♠ pour celles qui sortent un peu du programme, qui sont un bonus (au sein du bonus).

Il n'est pas nécessaire de faire les questions dans l'ordre. Notamment, on peut implémenter l'affichage (questions 6 et 7) avant d'implémenter le calcul de la suite de Fibonacci. Il suffit de remplacer u_n dans l'équation (◎) par n'importe quelle suite de nombres.

1 Introduction mathématiques

On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par la relation

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \\ u_1 = u_2 = 1. \end{cases}$$

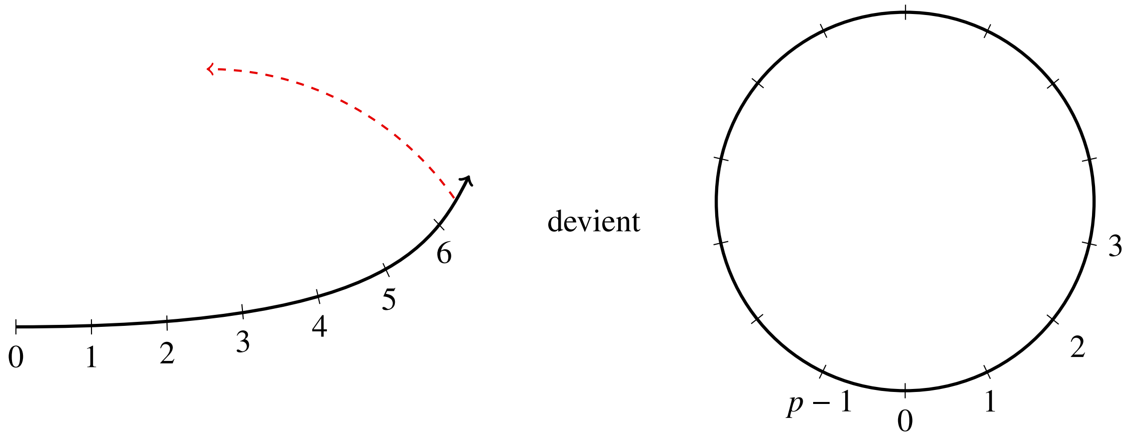
On va étudier les termes de cette suite *modulo* certains entiers p, ce qu'on notera $(u_n\%p)_{n\geq 1}$. Le modulo correspond au reste dans la division euclidienne, c'est-à-dire ce qu'il reste à u_n lorsqu'on lui soustrait p autant de fois que possible. Illustrons cette opération sur les premiers termes de la suite de Fibonacci dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$u_n\%2$	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
$u_n\%14$	1	1	2	3	5	8	13	7	6	13	5	4
$u_n\%7$												

► **Question 1:**

Remplir la dernière ligne du tableau en utilisant la fonction `pmodulo` de Scilab. Pour obtenir un vecteur `U` modulo `p`, la syntaxe est simplement `pmodulo(U,p)`. On pourra se servir des codes du TP2 pour obtenir ce vecteur.

On remarque que l'ensemble des nombres modulo p est fini et assimilable à $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. En fait, on peut voir le modulo comme un « enroulement » de l'ensemble des entiers.



On appelle cet ensemble enroulé $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On remarque qu'on peut faire des calculs avant ou après l'enroulement, i.e. on peut restreindre l'arithmétique à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Concrètement, étant donné deux entiers a et b, en écrivant $a' = a\%p$ et $b' = b\%p$, on a l'identité

$$(a+b)\%p = (a'+b')\%p. \tag{★}$$

Par exemple dans le tableau pour $u_{10}\%14$, on remarque que les deux calculs donnent le même résultat :

$$u_{10}\%14 = (u_8 + u_9)\%14 = 55\%14 = 13$$
$$\text{ou}\quad u_{10}\%14 = (u_8\%14 + u_9\%14)\%14 = (7+6)\%14 = 13\%14 = 13.$$

Une autre manière de voir les choses est de dire qu'on associe à chaque nombre n un angle $2\pi n/p$, ou un nombre complexe sur le cercle unité $e^{2i\pi n/p}$. Sommer les angles équivaut à multiplier les complexes.

▶ **Question 2:**

On calcule la suite jusqu'à un certain rang $N + 2$. Justifier que si

$$u_{N+1}\%p = u_1\%p \quad \text{et} \quad u_{N+2}\%p = u_2\%p,$$

alors pour tout $k \geq 1, u_{N+k}\%p = u_k\%p$. On appelle N la p-ième période de Pisano.

Astuce : On peut faire une récurrence « double ». [1]

♠ **Question 3:**

Étant donné un entier p quelconque, *démontrer* que la suite de Fibonacci modulo p est périodique. Donner une borne de cette période en fonction de p.

Astuce : On peut faire un raisonnement sur la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ des termes consécutifs, i.e. $v_n = (u_n, u_{n+1})$.

2 Implémentation de la visualisation

Calculons maintenant la suite de Fibonacci modulo p avec Scilab.

▶ **Question 4:**

```
function [Up] = fib_mod(N,p)
  Up = [1,1]
  for n = 3 : N
    Up(n) = ......
  end
endfunction
```

Remplir la fonction Scilab ci-dessus qui prend en argument deux entiers (`N` et `p`) et qui calcule un vecteur `Up` contenant les $u_n\%p$ pour n allant de 1 à N.

Vérification : $u_{100}\%21 = 3$.
Astuce : exploiter la formule (★).

Dans les faits, on ne sait pas *a priori* combien de termes on doit calculer avant de boucler, donc il faut calculer les termes de la suite un par un et mettre en place un système de détection de périodicité.

♥ **Question 5:**

Adapter la fonction `fib_mod` pour qu'elle ne prenne en argument que `p` et qu'elle calcule tous les u_n jusqu'à détecter qu'une période est révolue.

Vérification : les 2^e^, 3^e^, 10^e^ et 51^e^ périodes de Pisano sont 3, 8, 60 et 72.
Astuce : exploiter la question 2.

1. https://up2school.com/bac/revisions/recurrence-double-et-recurrence-forte/

Attaquons maintenant l'affichage. Dans un premier temps on souhaite tracer un cercle. À cet effet, on commence par analyser le fonctionnement de la méthode `plot2d` à l'aide du code :

```
x = rand(5,1)          // vecteur de 5 nombres aleatoires
y = rand(5,1)          // idem
plot2d(x,y,style=-1) // affiche des points
plot2d(x,y)            // relie les points
```

On voit alors que la commande `plot2d(x,y)` place tous les points de coordonnées (x_i, y_i) et les relie deux à deux, dans l'ordre.

► Question 6:

À l'aide de cette remarque, tracer une figure de cercle unité (i.e. de rayon 1).

Astuce : On peut faire parcourir $[0, 2\pi]$ à un angle et extraire l'abscisses et l'ordonnée du point correspondant à cet angle sur le cercle unité.

On remarque que le point du cercle unité associé à un angle θ peut être représenté par le nombre complexe $e^{i\theta}$. On assimile les termes $u_n\%p$ à des angles θ_n, puis à des points du cercle unité z_n avec les définitions [2]

$$\theta_n = 2\pi \frac{u_n\%p}{p} \quad \text{et} \quad z_n = e^{i\theta_n}. \tag{◎}$$

L'idée maintenant est de relier chaque z_n à z_{n+1}.

♥ Question 7:

Tracer quelques figures qui respectent cette règle. Pour un résultat plus propre, on pourra utiliser les options `frameflag=3` (repère orthonormé) et `axesflag=0` (les axes ne sont pas tracés).

♠ Bonus

Voici trois idées pour obtenir de nouvelles figures :

1. Considérer une suite de nombres quelconque (tronquée), quitte à ce qu'il n'y ait pas de périodicité. En cas de manque d'inspiration, il suffit de rentrer quelques termes dans l'OEIS [3] pour obtenir une suite de nombre qui en découle.
2. Modifier les conditions initiales u_1 et u_2. Par exemple les nombres de Lucas sont donnés par $u_1 = 2$ et $u_2 = 1$.
3. Utiliser une autre relation de récurrence pour calculer la suite. Attention, cela demandera peut-être de modifier la détection de boucle, par exemple pour les nombres triangulaires donnés par

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + n + 1, \end{cases}$$

il faut vérifier qu'on a déjà vu passer le couple (u'_n, n') plutôt que (u'_{n+1}, u'_n), avec la notation $a' = a\%p$.

N'hésitez pas à implémenter vos propres idées !

2. Pour les figures de l'intro, on a choisi $\theta_n = 2\pi \frac{u_n\%p}{p} + \frac{\pi}{2}$.
3. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences : https://oeis.org/