POURQUOI ÉTUDIER LES EDS ?

équa diff stochastique

Q. Zhang & Y. Chen "Diffusion Normalizing Flow" (2021)

→ méthode de génération avec des EDS "forward-backward"

forward : $dX = \underbrace{f(t,X)\,dt}_{\text{déterministe}} + \underbrace{g(t)\,dW}_{\text{stochastique}}$

backward : $dX = \left[f(t,X) - g(t)^2 s(t,X) \right] dt + g(t)\,dW$

X : l'image / la molécule

f : drift, partie "déterministe" (appris)

g : "volatilité", écart-type ← scheduler, généralement fixé.

W : processus de Wiener (génère un bruit blanc / mouvement brownien)

s : terme correctif /score (appris)

image X_0 $\longrightarrow$ $X(T)$ bruité

T. Karras et al. "Elucidating the Design Space of Diffusion-Based Generative Models" (2022)

↳ à partir d'un "denoiser" génératif classique

bruit $\xrightarrow{D} \square \xrightarrow{N} \square \xrightarrow{D} \square \cdots \square \rightarrow$ image générée non bruitée.

on peut générer les mêmes images en résolvant une EDS "backward"

(parfois on peut même se contenter d'une EDO)

On utilise ici l'approche "Monte-Carlo" : on regarde l'évolution d'un X donné, mais on peut aussi regarder l'évolution d'une densité de probabilité : c'est ce qu'on évalue avec la FID.

$f_\phi(x)$

correspond à la distrib du dataset.

1/ Introduction informelle

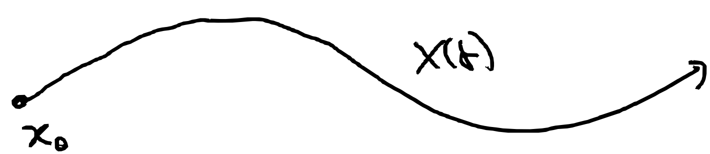
A. Quelques heuristiques

L'équation différentielle stochastique prototypique qui va nous intéresser est

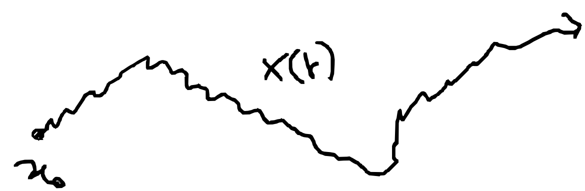
$$dX = b(X(t))\,dt + \Sigma(X(t))\,dW$$

- X processus stochastique $\in \mathbb{R}^n$
- b drift $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- Σ écart-type $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$
- W processus de Wiener $\mathbb{R}^m$

Avec $\Sigma = 0$ on a une EDO $\dfrac{dX}{dt} = b(X(t))$



Avec $\Sigma \neq 0$, la trajectoire devient bruitée



⚠ On rechigne à écrire $\frac{dW}{dt}$, mais moralement

$\frac{dW}{dt} = \xi$ est ce qu'on appelle du bruit blanc.

pour les simus, on utilise

$$W(t+h) \approx W(t) + \sqrt{h}\, Z_t \ , \quad Z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

(Z_t indépendants et identiquement distribués)

L'intégration ayant un effet "lissant"
donc on voudra aussi considerer la forme intégrale :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s))\,dt + \int_0^t \Sigma(X(s))\,dW$$

<u>Donc</u> il y a plein de trucs à définir :

- c'est qui W ? (Chap. 3)
- ça veut dire quoi "intégrer selon W" $\int_0^t \cdots dW$? (Chap 4)
- comment savoir si l'EDS est bien posée ? (Chap 5)
- comment simuler ça ?

3. La formule de Itô (chain rule stochastique)

Cette formule détermine l'évolution d'une fonction d'un processus stochastique

$$Y(t) := u(X(t))$$

Pour simplifier, on se place en 1D avec $dX = b(X(t))\,dt + dW$.

Contrairement à d'habitude, $dY \neq u'(X)\,dX$, i.e.

$$dY \neq u'(X)\,b(X)\,dt + u'(X)\,dW$$

l'approche usuelle exploite

$$dY = u'(X)\,dX + \frac{1}{2}u''(X)\,(dX)^2 + \dots$$

avec $(dX)^2$ négligeable.

Ici, moralement, le processus de Wiener vérifie

$$dW \approx (dt)^{1/2}$$

(d'où la racine dans les simus et d'où le fait qu'on ne veuille pas $\frac{dW}{dt}$)

Donc $(dX)^2 = \left(b(X)dt + \underline{dW}\right)^2 = dt + \{\text{termes d'ordre } (dt)^{3/2}\}$

dW^2

et ce n'est <u>pas</u> négligeable. On trouve

$$dY = u'(X)\,dX + \frac{1}{2}u''(X)\,(dX)^2 + \dots$$

$$= u'(X)b(X)dt + u'(X)dW + \frac{1}{2}u''(X)dt + \dots$$

$$= \left(u'(X)b(X) + \underline{\underline{\frac{1}{2}u''(X)}}\right)dt + u'(X)dW$$

nouveau terme!

Deux exemples d'EDS :

1) "Exponentielle" (?) stochastique $\begin{cases} dX = X\,dW & (\text{et non } dX = X\,dt) \\ X(0) = 1 \end{cases}$

grâce à la formule d'Itô, $Y = \ln(X)$ vérifie

$$dY = \frac{dX}{X} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{X^2}\right)(dX)^2 = dW - \frac{1}{2}dt.$$

donc, avec en outre $Y(0) = 0$, on obtient $Y(t) = W(t) - \frac{1}{2}t$.

donc $X(t) = \exp\left(W(t) - \frac{1}{2}t\right)$ et non pas $e^{W(t)}$

2) Évolution relative d'une action en finance, P le prix,

$$\frac{dP}{P} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{drift}}}{\mu}\,dt + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{volatilité/bruit}}}{\sigma}\,dW \iff P(t) = p_0 \exp\left(\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$$

Plan de la prochaine séance

- Regarder l'évolution de l'EDS jouet de Kassar et al. (2022)
- L. Evans "Introduction to SDEs" (2013),

Chapitre 2 : Les bases de théorie des probabilités.

- espace probabilisé, variables aléatoires, processus stochastiques
- intégration selon une loi de probabilité, moments (espérance, variance)
- indépendance (événements & v.a.), espérance/proba conditionnelle
- limites, loi des grands nombres
- martingales de processus discrets et continus.