

Léopold Trémant

Mon profil : Analyse numérique, Intégration en temps long, Développements asymptotiques, Systèmes multi-échelles, Méthodes géométriques, Apprentissage géométrique

@ tremant@math.unistra.fr

github.com/tremelow

tremelow.github.io

Tables des matières

1	Curriculum Vitae	1
2	Activités de recherche – Publications & Séminaires	4
3	Activités d'enseignement	6
4	Présentation des travaux de recherche	10
5	Projets de recherche	15

1 Curriculum Vitae

➤ Expérience d'enseignement et de recherche

Post-doctorant – [Inria Nancy - Grand-Est](#) 📍 Strasbourg 📅 jan. 2023 – déc. 2024
Apprentissage par réseaux de neurones pour équations différentielles géométriques.
Équipe Inria MACARON (anciennement TONUS), avec Emmanuel FRANCK, Laurent NAVORET et Clémentine COURTÈS.

Khôlleur (60 heqtd) – [Lycée Kléber](#) 📍 Strasbourg 📅 sept. 2024 – juin 2025
Évaluations orales hebdomadaires de mathématiques en MPSI.

Vacataire (35 heqtd) – [Univ. Strasbourg](#) 📍 Strasbourg 📅 sept. 2023 – jan. 2024
Cours & TP de méthodes numériques pour les EDP, en M1.

Vacataire (35 heqtd) – [Univ. Strasbourg](#) 📍 Strasbourg 📅 jan. 2023 – juin 2024
TD & TP d'analyse numérique niveau L2, en formations Informatique et Mathématiques.

ATER Temps Plein (180 heqtd) – [Grenoble INP](#) 📍 Grenoble 📅 oct. 2021 – août 2022
Enseignements à l'Ensimag (Grenoble INP), niveau L3 & M1.
Membre du Laboratoire Jean Kuntzmann (Univ. Grenoble-Alpes)

Doctorant – Inria Rennes – Bretagne Atlantique  Rennes  oct. 2018 – déc. 2021

Titre	Méthodes d'analyse asymptotique et d'approximation numérique		
Sous-titre	Problèmes d'évolution multi-échelles de type oscillatoire ou dissipatif		
Directeurs	Philippe Chartier  Inria & ENS Rennes  philippe.chartier@inria.fr	Mohammed Lemou  CNRS & ENS Rennes  mohammed.lemou@univ-rennes1.fr	
Affiliation	Institut de Recherche Mathématique de Rennes, Univ. Rennes 1 Équipe MINGuS, Inria Rennes – Bretagne Atlantique		
Soutenance	8 décembre 2021		
Manuscrit	https://tremelow.github.io/work/phd/phd-thesis_LTremant.pdf		
Composition du jury	François CASTELLA Pauline LAFITTE Katharina SCHRATZ Gilles VILMART Philippe CHARTIER Mohammed LEMOU	Professeur (IRMAR Univ Rennes 1) Professeur (CentraleSupélec) Professeur (Sorbonne Université) Maître d'enseignement et recherche (Univ. Genève) Directeur de recherche (Inria, IRMAR Univ. Rennes 1) Directeur de recherche (CNRS, IRMAR Univ. Rennes 1)	Président Rapporteur Rapporteur Examineur Directeur Co-directeur

Vacataire (126 heqtd) – Univ. Rennes 1  Rennes  sept. 2019 – juin 2021

IUT, formation GEII : Encadrement de TP (L1-L2) – 112h

Université : Oraux blancs CAPES et encadrement de TP (L2) – 8+12h

Stagiaire (M2) – Inria Rennes – Bretagne Atlantique  Rennes  avril 2018 – août 2021

Étude d'un développement double-échelle pour les problèmes à relaxation rapide

Stagiaire (M1) – Univ. Roskilde, Danemark  Roskilde, DK  avril – août 2017

Simulation d'épidémies de rougeole à partir de données réelles

Formation académique

Doctorat en analyse numérique – Univ. Rennes 1  2018 – 2021

Master 2 en mathématiques appliquées – Univ. Paris-Saclay  2017 – 2018

Spécialité en Analyse, Modélisation et Simulation, en parallèle de ma formation ingénieur

Diplôme d'ingénieur généraliste – ENSTA Paris  2015 – 2018

Spécialisation en Modélisation et Simulation, approche Recherche et Innovation

Classes préparatoires MPSI/MP* – Lycée Clemenceau, Nantes  2013 – 2015

GCSEs – Ilfracombe Arts College, Angleterre  2010 – 2011

Diplômes en Mathématiques, Anglais et Musique après une année dans une famille d'accueil

➤ Langages de programmation

- Julia** Implémentation de méthodes numériques depuis ma thèse dans différents contextes d'analyse numérique, e.g. convergence de schémas numériques temporels (standards, exponentiels, géométriques), de différences finies ou de méthodes d'optimisation. Enseignement pour les différences finies en M1.
- Python** Enseignement d'outils d'analyse numérique (Numpy, Matplotlib, Scipy, notebooks Jupyter). Utilisation de TensorFlow (Keras) et PyTorch pour l'apprentissage par réseaux de neurones.
- C++** Enseignement de programmation orientée objets en M1, sur les sujets de la génération aléatoire et de la simulation de particules.
- MATLAB** Enseignement de Scilab à l'IUT de Rennes. Utilisation de MATLAB pendant mes études en formation ingénieur pour les méthodes numériques et pendant mon stage de M2.
- LaTeX** Rédaction de documents scientifiques et enseignement de l'outil.
- R** Illustration des concepts probabilistes et d'analyse statistique simples.
- Rust** Projets personnels dans le cadre de l'Advent of Code 2022.

2 Activités de recherche – Publications & Séminaires

➤ Publications

◆ Revues internationales avec comité de relecture

[T1] Philippe Chartier, Mohammed Lemou et Léopold Trémant. « A uniformly accurate numerical method for a class of dissipative systems ». In : *Mathematics of Computation* 91.334 (2022), p. 843-869.

◆ En cours de révision

[T2] Brigitte Bidegaray-Fesquet, Clément Jourdana et Léopold Trémant. « Multi-frequency averaging and uniform accuracy towards numerical approximations for a Bloch model ». 2023. Révisions mineures.

◆ En préparation

[T3] Philippe Chartier, Mohammed Lemou, Florian Méhats et Léopold Trémant. « Averaging in a Nutshell ». 2023. En prép.

[T4] Clémentine Courtès, Emmanuel Franck, Michael Kraus, Laurent Navoret et Léopold Trémant. « Neural symplectic forms based on discrete Lagrangians for long-time simulation ». 2024. En prép.

◆ Thèse de doctorat

[T5] Léopold Trémant. « Méthodes d'analyse asymptotique et d'approximation numérique : problèmes d'évolution multi-échelles de type oscillatoire ou dissipatif ». Thèse. Université de Rennes, déc. 2021.

➤ Participation à des écoles d'été

Transport in Physics, Biology and Urban traffic – CEMRACS 📍 Marseille 📅 été 2022

Travail sur le projet « Méthode de tenseurs pour la résolution de modèles de jeux à champ moyen » de Virginie EHRLACHER & Luca NENNA, avec Laila BAROUKH & Damien PREL.

➤ Présentations lors de séminaires et congrès

📅 **fév. 2024** *Learning non-canonical Hamiltonian dynamics* (exposé)

📍 Bordeaux Séminaire de Calcul Scientifique et Modélisation, Institut de Mathématiques de Bordeaux

📅 **nov. 2023** *High-order averaging and machine learning* (exposé)

📍 Genève Séminaire d'analyse numérique, Section de Mathématiques, Univ. Genève

- 📅 **mai 2023** *Geometric numerical methods and machine learning for highly-oscillatory problems* (exposé)
📍 Sicile Math 2 Product (M2P) 2023, Session IS25 – Model Reduction, Calibration and Optimal Control for Plasmas
- 📅 **mars 2023** *Simulation en temps long de systèmes hautement oscillants* (exposé 45min)
📍 Grenoble Séminaire AMAC (EDP-AIRSEA-CVGI), Laboratoire Jean Kuntzmann
- 📅 **oct. 2022** *Autonomous geometric averaging and numerics* (exposé 50min)
📍 Strasbourg Séminaire Equations aux dérivées partielles, IRMA
- 📅 **oct. 2021** *Décomposition micro-macro et problèmes à relaxation rapide* (exposé 30min)
📍 Bordeaux Groupe de travail « Modèles et méthodes pour les équations cinétiques »
- 📅 **oct. 2021** *Développements micro-macro et précision uniforme pour une classe de problèmes dissipatifs* (poster)
📍 Palaiseau Congrès Jeunes Chercheurs en Mathématiques Appliquées du CMAP
- 📅 **déc. 2020** *Schémas numériques uniformément précis pour une classe de problèmes dissipatifs* (exposé 30min)
📍 en ligne Congrès d'Analyse Numérique pour les Jeunes de la SMAI
- 📅 **mars 2020** *Schéma numériques uniformément précis en tout temps pour une classe de problèmes diffusifs* (exposé 1h)
📍 Rennes Séminaire doctorant Landau, Univ. Rennes 1
- 📅 **juin 2019** *Micro-macro methods for stiff central manifold problems* (poster)
📍 Nantes Séminaire "Numerical Methods for Multiscale Models arising in Physics and Biology" du projet ANR MoHyCon
-

➤ Médiation scientifique

MATH.en.JEANS

📍 Collège Romain Rolland, Erstein 📅 2023 – 2024

Introduction à la recherche dans un cadre ludique au collège, de l'écriture de sujets¹ à la mise en forme de résultats.

Blog personnel – <https://tremelow.github.io/blog/>

📅 depuis 2024

Recommandation de vidéos de mathématiques récréatives et rédaction d'articles.

Parcours Énig'Maths – Fête de la Science

📍 Strasbourg 📅 oct. 2023

Énigmes mathématiques pour personnes de tout âge.

1. <https://www.mathenjeans.fr/content/College-Romain-Rolland-Erstein-2023-2024>

3 Activités d'enseignement

➤ Résumé du dossier

Enseigner fait partie de mon équilibre de travail, et, depuis ma deuxième année de doctorat, j'essaie de toujours associer cette mission à ma fonction de chercheur. J'ai enseigné en doctorat, en ATER et en post-doctorat, pour un total d'environ 420 heures, dans différents établissements (IUT, université, école d'ingénieur, classe préparatoire), à différents niveaux (de la L1 au M1), à différents degrés de responsabilité et sur différents sujets. Je suis notamment intervenu sur le tronc commun de mathématiques à l'Ensimag (Grenoble INP), en analyse, méthodes numériques, probabilités et statistiques, et sur les cours de C++ en deuxième année.

Sur l'année 2023-2024, j'ai eu la chance de prendre en charge le cours de calcul scientifique du M1 de l'Université de Strasbourg, précédemment géré par Philippe HELLUY. D'une part, j'ai dû me confronter à la charge de travail et aux difficultés que cette responsabilité impliquait : les objectifs pédagogiques, la prise en compte des pré-acquis, le minutage des cours... D'autre part, cela m'a permis de développer ma manière de faire cours, et d'apporter une touche personnelle : l'importance de la répétition, les TPs en Julia, des éléments d'intégration géométrique...

Les enseignements mathématiques que j'ai effectués sont généralement indissociables d'enseignements en programmation—dans différents langages, compilés ou non, avec des objectifs variés. Pour les étudiants, il est indispensable de savoir programmer pour certains sujets comme le calcul scientifique ou les statistiques, mais même dans d'autres contextes, il apprécie ces compétences qui leur permettent d'illustrer certains concepts et d'être plus compétitifs dans une recherche d'emploi. Pour ma part, cette interaction papier-machine est une part intrinsèque de ma réflexion mathématique, il est donc naturel que cela apparaisse dans ma manière de transmettre des connaissances. De manière similaire, j'aime partager l'aspect ludique des mathématiques, par exemple avec MATH.en.JEANS.

◆ Sujets et mots-clés

Connaissances générales

Nombres complexes Intégration Fourier périodique Suites numériques
Séries numériques Calcul asymptotique Algèbre linéaire Calcul matriciel
Systèmes d'évolution

Analyse

Intégration de Riemann Intégration de Lebesgue Intégrales à paramètres
Intégrales multiples Transformée de Fourier Espaces de Banach
Suites de Cauchy Équations aux dérivées partielles

Programmation

Python C++ moderne Programmation orientée objets Doxygen
Templates Analyse de performances Diagrammes UML

Méthodes numériques

Scilab Julia Notebooks Jupyter Interpolation polynomiale
Factorisation matricielle Méthodes itératives linéaires
Systèmes non-linéaires Optimisation quadratique Différences finies
Schémas temporels θ -schéma Schéma de Rusanov

Probabilités Lois discrètes Lois continues Calculs conditionnels Lois bivariées
Fonction génératrice Processus de Markov

Statistiques R Graphe de probabilité Régression linéaire Estimateurs des moments
Biais et variance d'estimateur Régression linéaire Intervalles de confiance
Maximum de vraisemblance Tests d'hypothèse Information de Fisher

◆ Langages de programmation enseignés et contexte

- Julia** Implémentation de méthodes de différences finies 1D et 2D, en M1 à l'université.
- Python** Pour les débutants en analyse numérique et en programmation, en L2 à l'université et en L3 en école d'ingénieur.
- C++** Pour la programmation orientée objets et le calcul scientifique en M1 en école d'ingénieur.
- Scilab** Introduction au calcul scientifique et illustration de certains concepts mathématiques, en IUT.
- R** Pour illustrer certains concepts de probabilités et statistiques, en L3 en école d'ingénieur.

➤ Détail des matières enseignées avec volumes horaires

◆ Année 2023–2024 (88 heqtd)

Calcul Scientifique – Cours 14h, TP 14h (M1) 📍 Univ. Strasbourg

Objectif Introduction aux méthodes de différences finies pour les EDP (chaleur, advection, transport non linéaire, ondes) avec conditions au bord homogènes. Implémentations en Julia.

Responsabilité Référent du cours, accompagné de Victor MICHEL-DANSAC pour les TP.

Khôlles (ou colles) de Mathématiques – 60h (MPSI) 📍 Lycée Kléber, Strasbourg

Objectif Évaluations orales hebdomadaires sur le programme de MPSI : raisonnements logiques, suites numériques, éléments d'analyse et de calcul différentiel, structures algébriques, arithmétique élémentaire, algèbre linéaire...

Référente Delphine CÔTE

◆ Année 2022–2023 (35 heqtd)

Analyse numérique appliquée – TD 6h, TP 12h (L2) 📍 Univ. Strasbourg

Objectif Introduction à l'analyse numérique pour les L2 Informatique, avec un accent sur la résolution de systèmes linéaires.

Référent Clémentine COURTÈS

Calcul scientifique – TD & TP 16h (L2)

♥ Univ. Strasbourg

Objectif Introduction à l'analyse numérique pour les L2 Mathématiques, avec un accent sur les méthodes d'interpolation et la résolution de systèmes non-linéaires.

Référent Michaël GUTNIC

Investissement Rédaction des sujets d'examen (TP) avec mes collègues vacataires.

♦ Année 2021–2022 (176 heqtd)

Modélisation et programmation – cours & TP 9h (M1)

♥ Ensimag, Grenoble

Objectif Fournir des bases de programmation orientée objet en C++ à travers un projet de génération de lois de distribution.

Responsabilité Co-référent du cours avec Jean-Baptiste DURAND

C++ pour les mathématiques appliquées – TP projet 16.5h (M1)

♥ Ensimag, Grenoble

Objectif Fournir des bases de programmation orientée objets en C++ à travers un projet de simulation de particules.

Référent Christophe PICARD

Méthodes numériques de base – cours 6h, TD 16.5h (L3)

♥ Ensimag, Grenoble

Objectif Présenter certaines notions de méthodes numériques pour la résolution d'équations (linéaires, non-linéaires et différentielles) avec un accent sur la complexité et les risques d'erreur.

Référents Stefanie HAHMANN & Guillaume JAMES

Investissement À mon initiative, les concepts d'interpolation polynomiale et la résolution numérique d'équations différentielles ont été illustrés à l'aide de notebooks Jupyter en Python.

Principes et méthodes statistiques – TD 24h, TP 9h (L3)

♥ Ensimag, Grenoble

Objectif Obtenir de bonnes bases pour l'étude statistique en faisant un lien fort avec des notions de probabilités.

Référent Olivier GAUDOIN

Tutorat en mathématiques – 20h (L3)

♥ Ensimag, Grenoble

Description Accompagnement personnalisé d'un étudiant étranger en difficulté sur le cursus mathématique. Notions d'algèbre, d'espaces vectoriels et de propriétés sur les fonctions.

Bases de Données – projet 15h (M1) – projet

♥ Ensimag, Grenoble

Description Mise en place d'une base de données pour un site de vente en ligne à partir d'un cahier des charges.

Référent Christophe BOBINEAU.

Probabilités appliquées – TD 19.5h (L3)

♥ Ensimag, Grenoble

Objectif Fournir des bases de connaissances pour les lois de probabilités usuelles, avec quelques notions de modélisation de phénomènes stochastiques.

Référent Clovis GALIEZ

Analyse pour l'ingénieur – TD 18h, TP 12h (L3)

♥ Ensimag, Grenoble

Objectif Introduire la notion d'intégrale de Lebesgue et les espaces fonctionnels associés, en comparaison avec l'intégration selon Riemann. Présenter quelques propriétés de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $H^s(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Fournir des bases sur la notion de norme et de convergence dans les espaces vectoriels de dimension infinie.

Référents Emmanuel MAÎTRE & Valérie PERRIER

♦ Année 2020–2021 (64 heqtd)

Outils Logiciels (formation Génie Électrique) – TP 56h (L1, L2)

♥ IUT Rennes

Référente **Virginie BOUTELOUP**

🏠 IUT Rennes, Univ. Rennes 1

@ virginie.bouteloup@univ-rennes1.fr

Description Utilisation de Xcas pour l'illustration de concepts mathématiques de base. Implémentation de méthodes de calcul numérique en Scilab. Rédaction de compte-rendus scientifiques avec LibreOffice.

Organisation à distance

<i>Moodle</i>	Distribution de devoir et de documents
<i>Microsoft Teams</i>	Mis en place par l'IUT à la rentrée de septembre 2020

Investissement

- Réflexions sur les modalités d'évaluation
- Acteur de la transition vers Python (depuis Scilab)
- Rédaction d'un sujet de mini-projet facultatif^a sur la visualisation de la période de Pisano, inspiré par la vidéo de Jacob Yatsko (<https://www.youtube.com/watch?v=o1eLKODSCqw>)

a. Disponible sur mon blog : <https://tremelow.github.io/blog/tp-pisano/>

Oraux blancs CAPES de Mathématiques – 8h (M1)

♥ Univ. Rennes 1

Description Évaluation de la qualité et de la pertinence scientifique de présentations orales pour l'épreuve scientifique du CAPES.

♦ Année 2019–2020 (62 heqtd)

Outils Logiciels – TP 50h (L1)

♥ IUT Rennes

Description Même cours qu'en 2020–2021 avec Virginie BOUTELOUP.

Analyse et Probabilités Appliquées – TP 12h (L2)

♥ Univ. Rennes 1

Description Implémentation de méthodes d'analyse numérique et d'analyse statistique en Python.

Référent Stéphane BALAC

4 Présentation des travaux de recherche

Dans cette partie, j'effectue la présentation analytique de mes travaux de recherche, en deux sections. La première section s'intéresse aux développements asymptotiques pour des problèmes double-échelle et à leur utilisation pour les méthodes numériques. La seconde s'intéresse aux propriétés géométriques d'équation différentielle, et à leur prise en compte pour les développements asymptotiques et l'apprentissage par réseaux de neurones. En vertu de l'article 29 de l'arrêté du 6 février 2023, une dernière section présente les résumés synthétiques des publications mentionnées. Les références bibliographiques sont listées dans les dernières pages de ce document.

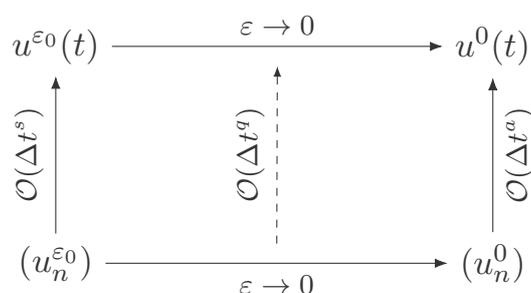
➤ Développements asymptotiques pour problèmes double-échelle

Une part de mes recherches porte sur des problèmes « double-échelle » dont la loi d'évolution mélange un phénomène de durée caractéristique courte ε avec une dynamique plus lente. Spécifiquement, ceux que j'étudie se distinguent en deux catégories. D'une part, les problèmes hautement oscillant, par exemple des particules chargées dans un fort champ magnétique, qui oscillent rapidement autour d'un guide central. D'autre part, les problèmes à relaxation rapide, par exemple des modèles collisionnels où la solution rejoint une sous-variété à dynamique lente (e.g. une maxwellienne) après un temps court.

Ces problèmes deviennent raides (i.e. les dérivées dégénèrent) lorsque le paramètre caractéristique ε tend vers zéro, et donc leur simulation numérique rencontre des problèmes connus de réduction d'ordre [40] lorsque le pas de temps Δt est grand par rapport au temps caractéristique.² Comme la borne d'erreur du schéma dépend de ε , l'ordre de convergence empirique (observé) peut être inférieur à l'ordre théorique qui correspondrait au régime $\Delta t \ll \varepsilon$.

Pour décrire avec pertinence l'erreur d'un schéma numérique, il faut étendre la notion d'ordre de convergence pour prendre en compte cette interaction entre le pas de temps et la durée caractéristique. Une extension naturelle est celle d'ordre *asymptotique*, qui revient à étudier le schéma après un passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. En général, cette limite n'existe pas,³ mais si le schéma limite est bien posé, on parle de méthode *préservant l'asymptote* (AP) [27]. Le point aveugle de cette notion est le régime intermédiaire $\Delta t \sim \varepsilon$, qu'on peut capturer avec la convergence *uniforme*, le supremum de l'erreur pour toutes les valeurs de ε .

En notant $t \mapsto u^\varepsilon(t)$ la solution continue et $(u_n^\varepsilon)_n$ la solution numérique à ε fixé, ce paradigme est résumé dans le diagramme ci-dessous : l'ordre standard s décrit la convergence dans le régime ε « grand » (de taille ε_0), l'ordre asymptotique a décrit la convergence pour ε arbitrairement petit, et l'ordre uniforme q décrit l'erreur « au pire » pour tous les régimes possibles.



2. Je ne mentionne pas ici les méthodes à pas de temps adaptatif, qui vont naturellement éviter ces pas de temps élevés, au prix d'une forte augmentation des coûts de calcul.

3. Par exemple le problème $\frac{d}{dt}u^\varepsilon(t) = \cos(t/\varepsilon)u^\varepsilon(t)$ a pour solution $t \mapsto u(0)e^{\varepsilon \sin(t/\varepsilon)}$ qui admet une limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Pourtant, à Δt fixé, la solution numérique par une méthode de Runge-Kutta standard n'admet pas de telle limite.

Dans le cas où la méthode dégénère pour certains couples $(\Delta t, \varepsilon)$ ou dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on pose respectivement $q = 0$ et $a = 0$. La seule relation *a priori* entre ces ordres est $q \leq \min(s, a)$. Pour les problèmes hautement oscillant, les schémas standards donnent $q = a = 0$, mais les méthodes asymptotiques comme l'homogénéisation peuvent donner $a > s = 0$. Ces ordres dépendent à la fois du schéma numérique et du problème considérés.

◆ Contributions à la convergence uniforme par méthode micro-macro

L'approche que j'utilise consiste à exploiter la connaissance asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$ pour séparer le problème en deux parties. La partie « macro » non-raide qui, combinée à un changement de variable, permet d'obtenir la solution avec une erreur $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ pour n arbitraire. La partie « micro » qui représente l'erreur d'approximation. Dans le cadre initial de problèmes hautement oscillants [9, 11], la partie macro représente la dynamique de dérive, que le changement de variable corrige avec des petites oscillations calculées symboliquement. La partie micro compense l'erreur commise sur la dérive et les oscillations, surtout dans le régime ε « grand. » Bien qu'équivalent au problème d'origine, ce nouveau problème micro-macro est mieux posé, au sens où ses dérivées dégénèrent à un ordre plus élevé. Cela permet d'utiliser des schémas numériques classiques sur ce nouveau problème sans subir de réduction d'ordre.

Extension à des problèmes à relaxation rapide

Dans [T1], j'ai travaillé sur des problèmes à relaxation rapide qui rejoignent une sous-variété de dynamique lente en temps court, principalement des modèles jouets pour mieux comprendre les cas importants d'équations aux dérivées partielles. Les méthodes adaptées à ces problèmes réussissent généralement à capturer la bonne sous-variété et sont précises à l'état final, mais la précision est dégradée pendant la phase transitoire.⁴ Nous avons dérivé un problème micro-macro dans ce nouveau contexte.

Une hypothèse majeure est que les valeurs propres de l'opérateur de relaxation sont entières, ce qui permet d'effectuer un changement de variable formel $t \leftarrow it$ pour obtenir à un problème hautement oscillant avec oscillations périodiques. Nous appliquons alors la démarche de moyennisation de [11] et effectuons le changement de variable inverse, qui fournit une décomposition micro-macro pour le problème à relaxation rapide d'origine. Contrairement au cadre hautement oscillant, dans ce contexte la partie linéaire raide apparaît toujours dans le problème micro-macro, mais on peut néanmoins utiliser des méthodes exponentielles [26, 25] ou des méthodes IMEX [16, 19] et obtenir une précision uniforme d'ordre arbitrairement élevé, alors que ces méthodes subissent normalement la réduction d'ordre. J'ai effectué les calculs symboliques *a priori* des simulations en Maple et implémenté les schémas numériques en Julia.

Application à des problèmes cinétiques et hyperboliques

Un exemple particulier qui nous intéressait dans [T1] est le modèle cinétique à noyau de collision linéaire de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) [3, 36]. Ce modèle décrit l'évolution d'une distribution de particules qui dépend des variables (t, x, v) de temps, d'espace et de vitesse respectivement, et ε représente le parcours moyen entre deux collisions pour une particule. Le comportement asymptotique (dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$) de ce problème est connu et il est bien capturé par certaines méthodes AP [27, 31, 1], voire UA d'ordre 1 [15]. Dans [T1], nous considérons le cas simple à deux vitesses $v \in \{-1, +1\}$, aussi appelée problème du télégraphe. Ce problème ne rentre pas directement dans le cadre de nos preuves, mais grâce à une relaxation de type Rosenau [38] et avec conditions au bord périodique, nous construisons une méthode d'ordre 2

4. Par exemple la méthode d'Euler implicite appliquée au modèle $\dot{u} = -u/\varepsilon$ avec un pas de temps $\Delta t = \varepsilon$ fournit une mauvaise approximation dans la phase transitoire : $u_1 = 1/2$ alors que $u(\Delta t) = u(\varepsilon) = e^{-1}$. Même pour un pas de temps arbitrairement petit, il existera toujours une valeur de ε pour laquelle l'erreur sera dégradée.

à précision uniforme. La même approche nous permet aussi de traiter une classe de problèmes hyperboliques présentée dans [28], en utilisant cette fois des différences finies.

Extension à des problèmes linéaires avec forçages quasi-périodique et évanescents

Dans [T2], on s'intéresse à la simulation d'un problème issu du modèle de Bloch analysé dans [5] qui décrit l'évolution des niveaux d'énergie dans une boîte quantique, où le temps caractéristique ε est un facteur de normalisation des fréquences propres de la boîte. Ce problème linéaire mélange deux forçages de même temps, un quasi-périodique (i.e. avec un nombre fini de fréquences non-résonantes) et un exponentiellement décroissant. La difficulté provient principalement du caractère quasi-périodique qui introduit des petits diviseurs dans les développements asymptotiques, mais les techniques de développement asymptotique s'adaptent bien à ce nouveau cadre au prix d'une hypothèse d'analyticité par rapport à la phase. Nous construisons itérativement des changements de variables d'ordre asymptotiques croissants, mais de rayon d'analyticité (par rapport à la phase) décroissant. Cela nous permet de dériver un problème micro-macro qui peut être simulé numériquement avec des schémas d'ordre plus élevé, et d'obtenir une convergence uniforme sur le problème issu du modèle de Bloch. Il est à noter que ces hypothèses de décroissance exponentielle et d'analyticité pourraient être relaxées dans le cas de développements à un ordre fixé.

➤ Problèmes avec considérations géométriques

Le deuxième axe de ma recherche concerne les problèmes avec propriétés géométriques. Les plus connus sont les problèmes hamiltoniens canoniques, c'est-à-dire les systèmes décrits par leur position et leur quantité de mouvement, dont les équations différentielles dérivent d'un hamiltonien parfois appelé énergie. Ces propriétés peuvent aussi être la préservation du volume (champs à trace nulle), ou une structure hamiltonienne non-canonique (avec un potentiel symplectique en plus de l'hamiltonien). Pour ces problèmes, l'intérêt porte généralement sur la simulation en temps long, et donc pas sur la précision au sens usuel mais sur la préservation des propriétés géométriques au cours de la simulation. Cela requiert l'utilisation de schémas numériques adaptés [23], par exemple le schéma d'Euler symplectique, ou le plus célèbre schéma du point du milieu implicite.

◆ Contribution aux méthodes de moyennisation

Les développements asymptotiques ne préservent pas nécessairement la structure géométrique,⁵ mais pour les problèmes hautement oscillant, la moyennisation « stroboscopique » [10, 9] a généralement de bonnes propriétés à cet égard. Dans [T3], j'ai travaillé sur ces méthodes dans un cadre théorique général. L'objectif n'était pas de trouver de nouveaux résultats mais de présenter des résultats connus dans un cadre original et concis. Une section est dédiée aux problèmes autonomes, où les oscillations proviennent d'une partie raide linéaire engendrant un groupe périodique et où la dérive provient d'une partie non-raide non-linéaire. Nous montrons que la procédure de moyennisation préserve le caractère autonome du problème et revient à trouver un changement de variable qui modifie les parties raides et non-raides pour qu'elles commutent. Cela correspond à des résultats sur les formes normales telles que présentées dans [39].

Le reste de la réflexion porte sur le cas d'un problème à oscillations forcées.⁶ Nous montrons que la procédure de moyennisation préserve les propriétés géométriques du problème à une

5. Par exemple, pour une matrice M , si $\text{tr}(M) = 0$, alors $\det(e^{\varepsilon M}) = 1$ mais l'approximation $e^{\varepsilon M} \approx \text{id} + \varepsilon M$ perd cette propriété géométrique.

6. Un problème à oscillations forcées peut en particulier provenir d'un problème autonome « filtré », i.e. si un problème s'écrit $\dot{y} = \frac{1}{\varepsilon} Ay + f(y)$, on considère plutôt $u(t) = e^{-tA/\varepsilon} y(t)$.

fonction plate (en ε) près, et que la précision à un ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ sur la solution se traduit automatiquement en erreur du même ordre sur la structure géométrique. Ces résultats sont spécifiques à la moyennisation stroboscopique, pour laquelle le flot exact coïncide au flot du champs de vecteurs moyen aux temps $t \in \varepsilon\mathbb{N}$, et donc les propriétés géométriques sont respectées au moins en ces temps. À l'aide d'estimées de Cauchy, nous montrons que le champs de vecteurs moyen est asymptotiquement trop « lent » par rapport à ce temps caractéristique ε pour dévier significativement des conditions géométriques en jeu.

◆ Contribution à l'apprentissage géométrique

Depuis quelques années, les réseaux de neurones sont utilisés pour reconstruire les champs de vecteurs sous-jacent d'équations différentielles à partir d'observations de trajectoires [13]. Pour cela, le réseau prend en entrée un point de l'espace des phases et renvoie un champs de vecteurs en ce point. Les réseaux sont des fonctions paramétriques dont les paramètres sont ajustés pendant la phase dite d'« entraînement » de manière stochastique [29]. Pour les problèmes hamiltoniens non-canonique, il est préférable [14] d'apprendre l'hamiltonien et la forme symplectique qui les caractérise. Cela est vérifié à l'aide de simulations à haute précision : la dynamique apprise est alors correcte en temps court, et les propriétés en temps long de stabilité et de préservation d'énergie sont également satisfaites.

Néanmoins, en effectuant des simulations en temps long avec un schéma numérique « géométrique » adapté à ces problèmes [20], nous observons dans [T4] que l'erreur et la condition de stabilité sont moins bonnes pour le problème appris que pour le problème d'origine. Nous conjecturons que ce comportement est dû à l'apprentissage d'invariants qui perturbent le potentiel symplectique et qui apparaissent dans le schéma mais pas dans la dynamique—une considération jusqu'alors ignorée pour l'utilisation de ces méthodes. Pour remédier à cela, nous modifions la méthode d'apprentissage en minimisant l'erreur du schéma plutôt que l'erreur sur le champs de vecteur. Cette approche est validée sur une équation de Lotka–Volterra et un modèle de particule chargée de masse nulle dans un champ électromagnétique, pour lesquels les simulations sont plus précises avec notre méthode qu'avec l'approche usuelle. En revanche, ce nouvel apprentissage implique que les simulations (l'évaluation) soient effectuées avec le même schéma et le même pas de temps que l'apprentissage. Nous illustrons l'importance de ne pas violer cette restriction et argumentons son bien-fondé. Pour finaliser l'article, nous souhaitons également l'appliquer à des modèles particuliers de la physique des plasmas, notamment le modèle de centre guide.

➤ Résumés des publications

[T1] A uniformly accurate numerical method for a class of dissipative systems

On considère des systèmes à relaxation rapide avec terme de raideur linéaire, et on effectue des développements asymptotiques pour séparer le problème en deux parties : une « micro » de taille ε^n , et une « macro » non raide. La partie macro peut être calculée avec des schémas usuels, et la partie micro présente une raideur « retardée », c'est-à-dire qu'elle n'apparaît qu'à partir d'un certain ordre. On peut donc résoudre le problème micro-macro avec une précision *uniforme* d'ordre n , et reconstruire la solution du problème initial avec la même précision. Ce résultat est valide en dimension finie, et on l'étend partiellement à des équations aux dérivées partielles, notamment à un modèle cinétique à deux vitesses appelé équation du télégraphe.

[T2] Multi-frequency averaging and uniform accuracy towards numerical approximations for a Bloch model

L'évolution des niveaux d'énergies dans des boîtes quantiques avec forçage électromagnétique mélange des dynamiques d'oscillations rapides à fréquences multiples et de relaxation rapide. On considère ici un système issu du modèle de Bloch qui comporte un forçage multi-fréquence et un forçage exponentiellement décroissant, de (petit) temps caractéristique partagé. Du fait du caractère multi-échelles de ce problème, les méthodes numériques usuelles présentent un ordre de convergence dégradé, dans un phénomène appelé réduction d'ordre. Nous exploitons des développements asymptotiques pour dériver un nouveau problème équivalent appelé problème micro-macro. Notre résultat est double : on montre que notre construction peut-être conduite à un ordre arbitrairement élevé, et que le problème micro-macro peut être résolu avec une précision uniforme, i.e. sans réduction d'ordre. Cette précision est préservée sur la solution du problème d'origine.

[T3] Averaging in a Nutshell

Cet article synthétise de résultats de moyennisation récents qui se concentre notamment sur la moyennisation stroboscopique, et fournit des preuves originales pour la conservation de propriétés géométriques par le champ moyen. On montre que la définition même du champ moyen suffit à démontrer ces propriétés sans avoir besoin de construire ce champ à l'aide de séries formelles, contrairement à l'approche historique.

[T4] Neural symplectic forms based on discrete Lagrangians for long-time simulation

Dans l'apprentissage de champs de vecteurs hamiltoniens, il a été montré que l'encodage de la structure était important pour obtenir des bonnes propriétés de stabilité lors de simulations en temps long. Nous observons que ces dynamiques apprises interagissent mal avec des schémas « géométriques » pourtant adaptés à cet usage, les intégrateurs variationnels dégénérés. Pour combler ces lacunes, nous modifions la fonction de *loss* pour minimiser l'erreur sur schéma plutôt que l'erreur sur le champs de vecteur. Cette approche est validée sur des modèles particuliers de la physique des plasmas, notamment le centre guide, pour lesquels les simulations sont plus précises avec notre méthode qu'avec l'approche usuelle. En revanche, ce nouvel apprentissage implique que les simulations (l'évaluation) soient effectuées avec le même schéma et le même pas de temps que l'apprentissage. Nous illustrons l'importance de cette restriction et argumentons son bien-fondé.

[T5] Méthodes d'analyse asymptotique et d'approximation numérique : problèmes d'évolution multi-échelles de type oscillatoire ou dissipatif

Les problèmes à relaxation rapide apparaissent dans de nombreux systèmes physiques ou biologiques, notamment dans le cadre de modèles cinétiques avec collisions. Leur comportement mélange une dynamique de relaxation de temps caractéristique ε et une partie lente d'interactions (généralement non-linéaire) ou de transport. Malgré le développement depuis les années 1980 de méthodes de résolution adaptées peu coûteuses (i.e. stables et essentiellement explicites), un problème demeure : la précision des méthodes est dégradée lorsque le pas de discrétisation est d'ordre ε . Dans ce manuscrit, on présente une méthode pour dépasser cette limite. L'approche mise en œuvre consiste à effectuer des développements asymptotiques par rapport au paramètre ε de sorte à pouvoir séparer le modèle asymptotique et son erreur ; on parle alors d'un problème micromacro. Ce nouveau problème peut être résolu numériquement et on reconstruit la solution du problème d'origine avec une précision indépendante du paramètre ε . Nos développements asymptotiques font appel à des résultats récents de moyennisation, si bien

qu'un chapitre de ce manuscrit est dédié à l'exposition de preuves originales de certains résultats de moyennisation connus. On discute en outre d'extensions possibles de nos résultats.

5 Projets de recherche

◆ Développements asymptotiques et micro-macro

Implémentation efficace et automatique des développements micro-macro

B. Bidégaray-Fesquet

C. Jourdana

Il nous semble que la popularisation de ces méthodes micro-macro est limitée par la complexité des résultats théoriques et des calculs symboliques nécessaires. Cependant, dans certains contextes (e.g. celui de [T2]), le forçage peut être décomposé en série de Fourier ou de Laplace, et donc les calculs *a priori* peuvent être effectués de manière efficace et automatique. Une première étape traiterait le cas linéaire, en calculant simplement les coefficients de Fourier (matriciels) du changement de variable et du champs moyen. Pour le cas non-linéaire, l'équation qui définit le changement de variable implique une dérivée spatiale (de l'espace des phases), mais le calcul pourrait être effectué en utilisant soit des différences finies comme dans [12] ou de la différentiation automatique [34]. En se concentrant sur l'implémentation de ces calculs sans se préoccuper des questions théoriques précédemment traitées, nous rendrions ces méthodes plus accessibles à des usagers en dehors de la communauté mathématique.

Moyennisation géométrique, cas quasi-périodique non-linéaire

Dans [9], les développements asymptotiques de moyennisation sont effectués sur des problèmes non-linéaires mono-fréquences. Dans [T2], nous effectuons nos développements sur des problèmes linéaires multi-fréquences, sans considérations géométriques. En travaillant sur ces problématiques, nous avons remarqué que les difficultés liées aux non-linéarités semblent indépendantes de celles liées aux fréquences. Il est naturel de rassembler ces travaux pour continuer à généraliser cette approche. Cela permettrait par exemple de traiter l'équation de Schrödinger non-linéaire dans des domaines rectangulaires plutôt que carrés.

Développement micro-macro du modèle de Bloch complet

B. Bidégaray-Fesquet

C. Jourdana

Les résultats de [T2] concernent un problème issu du modèle de Bloch, mais pas le problème directement, qui lui comporte une partie raide qui induit une relaxation et des oscillations, ainsi qu'un forçage quasi-périodique. Ces résultats ou ceux de [9, T1] ne s'appliquent pas à ce problème, bien que l'approche semble généralisable à ce nouveau cadre d'un point de vue formel. Cette démarche est aussi encouragée par [8] où une dynamique hautement oscillante est ajoutée à un problème à relaxation rapide, sans impact majeur sur les résultats de problèmes de relaxation. Nous souhaitons donc traiter ce problème complet de manière rigoureuse.

◆ Étude théorique de schémas numériques

Précision uniforme par itérations de Picard

B. Bidégaray-Fesquet

C. Jourdana

Pour le problème de Bloch complet, et d'autres problèmes double-échelle, une nouvelle approche consisterait à calculer un schéma *a priori* à partir d'itérations de Picard. Cela éviterait la réduction d'ordre des méthodes exponentielles [30] et intégrales [11], malgré leur similarité. Ces méthodes sont basées sur la formulation intégrale des équations,⁷ où, grossièrement, l'inconnue $t \mapsto u(t)$ dans l'intégrale est spécialisée en un point connu. On pourrait tirer profit d'itérations de

7. Par exemple pour un problème $\dot{u} = Au + f(u)$, on utilise $u(t) = e^{tA}u(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(e^{sA}u(s)) ds$.

Picard avant d'effectuer cette spécialisation, et calculer les intégrales imbriquées alors obtenues par calcul symbolique. Certains tests préliminaires sur le modèle de Bloch indiquent que cette méthode permet d'obtenir un ordre de convergence uniforme arbitraire, mais sa convergence théorique doit encore être étudiée.

Analyse d'erreur rétrograde pour intégrateurs variationnels dégénérés M. Kraus

Un outil important pour l'étude des comportements en temps long des schémas numériques est l'analyse d'erreur rétrograde (*backward-error analysis*) [23, Sec. IX]. Cela revient à considérer la solution numérique comme la solution exacte d'un problème modifié, qui diffère du problème d'origine par une perturbation. On peut calculer cette perturbation avec une série entière (formelle) en Δt dont les coefficients dépendent du champs d'origine et du schéma. Pour les intégrateurs variationnels dégénérés [20, 7], les schémas « géométriques » que nous utilisons dans [T4], il existe un hamiltonien et une forme symplectique perturbés. Ce sont les quantités que nous apprenons avec notre méthode. Actuellement, il existe des analyses d'erreur rétrograde pour d'autres méthodes numériques similaires [23, 42], mais pas pour les intégrateurs variationnels dégénérés. Cette analyse effectuée, nous pourrions inverser la relation entre les quantités modifiées (appries) et les quantités d'origine, comme cela est fait dans [17] pour le cas canonique. Cela permettrait de dissocier l'apprentissage de l'évaluation, i.e. d'utiliser d'autres schémas numériques et d'autres pas de temps lors des simulations. Nous pourrions aussi identifier le terme qui pose problème lors d'un apprentissage sur le champs de vecteurs [14] pour le pénaliser.

◆ Modèles cinétiques

Apprentissage et méthode δf – *particle-in-cell* C. Courtès E. Franck L. Navoret

L'équation de Vlasov–Poisson est un modèle cinétique courant pour les plasmas sans collision. Son comportement en temps long autour d'états stationnaires non-homogènes est encore un sujet de recherche actif [18, 21]. Numériquement, les méthodes δf -PIC (*particle in cell*) [6] ont justement été développées pour ce contexte, en limitant la résolution aux perturbations autour d'un équilibre. Les réseaux de neurones, en l'occurrence des PINNs (*Physic-Informed Neural Networks* [37]) ou des *NeuralOperators* [32], sont justement efficaces pour apprendre des familles paramétriques d'états d'équilibres, qui pourront ensuite être corrigés par des méthodes numériques δf -PIC bien connues. Cette approche de prédiction-correction (resp. neuronale et numérique) autour d'un équilibre a démontré son efficacité pour des problèmes hyperboliques avec méthodes Galerkin discontinues [22]. Dans un second temps, nous souhaiterons remplacer ces états d'équilibre par des solutions apprises, l'apprentissage en temps long présentant un défi en soi.

Stabilisation du développement asymptotique pour BGK

Le modèle asymptotique obtenu pour l'équation du télégraphe dans [T1] fait apparaître une relaxation de type Rosenau [38], de sorte à stabiliser un terme de chaleur rétrograde. Il reste à savoir comment « bien » stabiliser les développements d'ordre supérieur. J'ai remarqué que, dans ce cadre, cette relaxation correspond à une approximation de Padé (voir p. ex. [35, 2]) du développement formel obtenu naïvement, en la variable $\varepsilon\xi$ avec ε le paramètre de relaxation et ξ la fréquence spatiale en Fourier. En remplaçant les polynômes par des fractions rationnelles, cette méthode stabilise le comportement des hautes fréquences, tout en conservant la tendance pour ε petit. Néanmoins, un calcul direct de ces fractions engendre des instabilités à des ordres plus élevés à cause d'une singularité dans les valeurs propres, ce qui invite une investigation minutieuse.

Méthode micro-macro sur une transformation de Hopf-Cole

Comme la densité de particules f des modèles cinétiques est positive, on peut effectuer une transformation de Hopf-Cole $f = Me^{-\psi/\varepsilon}$ inspirée des développements BKW avec M la Maxwellienne d'équilibre. En décomposant ψ en deux parties (une qui capture la masse et l'autre le reste) on fait apparaître un problème double-échelle avec une structure hamiltonienne. Des développements asymptotiques sur ψ sont effectués jusqu'à l'ordre 2 de manière *ad hoc* dans [33] sans préservation de structure. Dans [24], cette transformation est utilisée pour construire un schéma AP à l'ordre 1 qui capture naturellement la formation de diracs dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Il semble possible d'appliquer des raisonnements géométriques à cette catégorie de problème pour étendre les développements asymptotiques à des ordres plus élevés (de manière systématique) et obtenir une meilleure convergence. Cela permettrait aussi de mieux comprendre les difficultés en jeu lorsque la relaxation raide est non-linéaire dans les développements asymptotiques.

Références

- [1] Giacomo Albi, Giacomo Dimarco et Lorenzo Pareschi. « Implicit-explicit multistep methods for hyperbolic systems with multiscale relaxation ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 42.4 (2020). Publisher : SIAM, A2402-A2435.
- [2] George A Baker Jr et Peter Graves-Morris. *Padé Approximants*. T. 59. Encyclopedia of Mathematics and It's Applications. Cambridge University Press, 1996.
- [3] Prabhu Lal Bhatnagar, Eugene P Gross et Max Krook. « A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems ». In : *Physical review* 94.3 (1954), p. 511.
- [5] Brigitte Bidégaray-Fesquet, François Castella et Pierre Degond. « From Bloch model to the rate equations ». In : *Discrete & Continuous Dynamical Systems* 11.1 (2004), p. 1.
- [6] Stephan Brunner, Ernest Valeo et John A Krommes. « Collisional delta-f scheme with evolving background for transport time scale simulations ». In : *Physics of Plasmas* 6.12 (1999), p. 4504-4521.
- [7] Joshua W Burby, John M Finn et C Leland Ellison. « Improved accuracy in degenerate variational integrators for guiding centre and magnetic field line flow ». In : *Journal of Plasma Physics* 88.2 (2022), p. 835880201.
- [8] François Castella, Philippe Chartier et Julie Sauzeau. « Analysis of a time-dependent problem of mixed migration and population dynamics ». In : *arXiv preprint, arXiv :1512.01880* (2018).
- [9] François Castella, Philippe Chartier, Florian Méhats et Ander Murua. « Stroboscopic Averaging for the Nonlinear Schrödinger Equation ». In : *Foundations of Computational Mathematics* 15.2 (avr. 2015), p. 519-559.
- [10] P. Chartier, A. Murua et J. M. Sanz-Serna. « Higher-Order Averaging, Formal Series and Numerical Integration I : B-series ». In : *Foundations of Computational Mathematics* 10.6 (déc. 2010), p. 695-727.
- [11] Philippe Chartier, Mohammed Lemou, Florian Méhats et Gilles Vilmart. « A New Class of Uniformly Accurate Numerical Schemes for Highly Oscillatory Evolution Equations ». In : *Foundations of Computational Mathematics* 20.1 (fév. 2020), p. 1-33.
- [12] Philippe Chartier, Mohammed Lemou, Florian Méhats et Xiaofei Zhao. « Derivative-free high-order uniformly accurate schemes for highly-oscillatory systems ». In : *submitted preprint* (2020).
- [13] Ricky TQ Chen, Yulia Rubanova, Jesse Bettencourt et David K Duvenaud. « Neural ordinary differential equations ». In : *Advances in neural information processing systems* 31 (2018).
- [14] Yuhan Chen, Takashi Matsubara et Takaharu Yaguchi. « Neural symplectic form : learning Hamiltonian equations on general coordinate systems ». In : *Advances in Neural Information Processing Systems* 34 (2021), p. 16659-16670.
- [15] Nicolas Crouseilles, Hélène Hivert et Mohammed Lemou. « Numerical schemes for kinetic equations in the anomalous diffusion limit. Part II : Degenerate collision frequency ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 38.4 (2016), A2464-A2491.
- [16] Michel Crouzeix. « Une méthode multipas implicite-explicite pour l'approximation des équations d'évolution paraboliques ». In : *Numerische Mathematik* 35.3 (1980), p. 257-276.

- [17] Marco David et Florian Méhats. « Symplectic learning for Hamiltonian neural networks ». In : *arXiv preprint arXiv :2106.11753* (2021).
- [18] Bruno Despres. « Scattering structure and Landau damping for linearized Vlasov equations with inhomogeneous Boltzmannian states ». In : *Annales Henri Poincaré*. T. 20. Springer. 2019, p. 2767-2818.
- [19] Giacomo Dimarco et Lorenzo Pareschi. « Implicit-explicit linear multistep methods for stiff kinetic equations ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 55.2 (2017), p. 664-690.
- [20] C Leland Ellison, John M Finn, Joshua W Burby, Michael Kraus, Hong Qin et William M Tang. « Degenerate variational integrators for magnetic field line flow and guiding center trajectories ». In : *Physics of Plasmas* 25.5 (2018), p. 052502.
- [21] Erwan Faou, Romain Horsin et Frédéric Rousset. « On linear damping around inhomogeneous stationary states of the Vlasov-HMF model ». In : *Journal of Dynamics and Differential Equations* 33.3 (2021), p. 1531-1577.
- [22] Emmanuel Franck, Victor Michel-Dansac et Laurent Navoret. « Approximately well-balanced Discontinuous Galerkin methods using bases enriched with Physics-Informed Neural Networks ». working paper or preprint. Oct. 2023.
- [23] Ernst Hairer, Christian Lubich et Gerhard Wanner. *Geometric Numerical Integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. 2^e éd. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. isbn : 978-3-540-30663-4.
- [24] H el ene Hivert. « A first-order asymptotic preserving scheme for front propagation in a one-dimensional kinetic reaction-transport equation ». In : *Journal of Computational Physics* 367 (2018), p. 253-278.
- [25] Marlis Hochbruck, Jan Leibold et Alexander Ostermann. « On the convergence of Lawson methods for semi-linear stiff problems ». In : *Numerische Mathematik* 145 (2020), p. 553-580.
- [26] Marlis Hochbruck et Alexander Ostermann. « Explicit exponential Runge-Kutta methods for semilinear parabolic problems ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 43.3 (2005). Publisher : SIAM, p. 1069-1090.
- [27] Shi Jin. « Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 21.2 (1999). Publisher : SIAM, p. 441-454.
- [28] Shi Jin et Zhouping Xin. « The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions ». In : *Communications on pure and applied mathematics* 48.3 (1995). Publisher : Wiley Online Library, p. 235-276.
- [29] Diederik P Kingma et Jimmy Ba. « Adam : A method for stochastic optimization ». In : *arXiv preprint arXiv :1412.6980* (2014).
- [30] J Douglas Lawson. « Generalized Runge-Kutta processes for stable systems with large Lipschitz constants ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 4.3 (1967), p. 372-380.
- [31] Mohammed Lemou et Luc Mieussens. « A new asymptotic preserving scheme based on micro-macro formulation for linear kinetic equations in the diffusion limit ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 31.1 (2008). Publisher : SIAM, p. 334-368.
- [32] Zongyi Li, Nikola Kovachki, Kamyar Azizzadenesheli, Burigede Liu, Kaushik Bhattacharya, Andrew Stuart et Anima Anandkumar. « Fourier neural operator for parametric partial differential equations ». In : *arXiv preprint arXiv :2010.08895* (2020).
- [33] Songting Luo et Nicholas Payne. « An asymptotic method based on a Hopf-Cole transformation for a kinetic BGK equation in the hyperbolic limit ». In : *Journal of Computational Physics* 341 (2017), p. 295-312.
- [34] Richard D Neidinger. « Introduction to automatic differentiation and MATLAB object-oriented programming ». In : *SIAM review* 52.3 (2010), p. 545-563.
- [35] Evgenii Mikha ilovich Nikishin et Vladimir Nikolaevich Sorokin. *Rational approximations and orthogonality*. T. 92. American Mathematical Society Providence, RI, 1991.
- [36] Beno t Perthame et Mario Pulvirenti. « Weighted L^∞ bounds and uniqueness for the Boltzmann BGK model ». In : *Archive for rational mechanics and analysis* 125.3 (1993), p. 289-295.
- [37] Maziar Raissi, Paris Perdikaris et George E Karniadakis. « Physics-informed neural networks : A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations ». In : *Journal of Computational physics* 378 (2019), p. 686-707.
- [38] Thomas Rey et Giuseppe Toscani. « Large-time behavior of the solutions to Rosenau-type approximations to the heat equation ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 73.4 (2013), p. 1416-1438.

- [39] Jan A. Sanders, Ferdinand Verhulst et James Murdock. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. 2^e éd. Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 2007. isbn : 978-0-387-48916-2.
- [40] Bruno Sportisse. « An analysis of operator splitting techniques in the stiff case ». In : *Journal of computational physics* 161.1 (2000), p. 140-168.
- [42] Mats Vermeeren. « Modified equations for variational integrators applied to Lagrangians linear in velocities ». In : *arXiv preprint arXiv :1709.09567* (2017).